

SÉRIE A, N. 2690
N. D'ORDRE 3562

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PHAM MAU QUAN

1ère THESE. — SUR UNE THEORIE RELATIVISTE DES FLUIDES THERMODYNAMIQUES.

2ème THESE. — EQUATIONS DE LAPLACE ET ESPACES HARMONIQUES.

Soutenues le 21 Juin 1954, devant la Commission d'examen

M. G. DARMOIS	Président
Madame M. A. TONNELAT	} Examinateurs
M. A. LICHNEROWICZ.	

BOLOGNA

COOPERATIVA TIPOGRAFICA AZZOGUIDI

1955

Estratto dagli *Annali di Matematica pura ed applicata*
Serie IV, Tomo XXXVIII (1965)

SÉRIE A, N. 2690
N. D'ORDRE 3562

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PHAM MAU QUAN

1^{ère} THÈSE. — SUR UNE THEORIE RELATIVISTE DES FLUIDES THERMODYNAMIQUES.

2^{ème} THÈSE. — EQUATIONS DE LAPLACE ET ESPACES HARMONIQUES.

Soutenues le 21 Juin 1954, devant la Commission d'examen

M. G. DARMOIS	Président
Madame M. A. TONNELAT	} Examinateurs
M. A. LICHNEROWICZ.	

BOLOGNA

COOPERATIVA TIPOGRAFICA AZZOGUIDI

1955

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÈRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LUCAS	T	Physique.
A. DENJOY	T	Théorie des Fonctions.	A. THOMAS	T	Biologie Cellulaire
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	ARNULF	T	Optique appliquée.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	MAX MORAND		Physique.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	SOLEILLET	T	Physique.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale.	DANJON	T	Astronomie.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	FROMAGEOT	T	Chimie Biologique.
JOB	T	Chimie générale.	LAPORTE	T	Physique générale et Radio-activité.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	JANET	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	PETIT	T	Biologie maritime.
PÈRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	GALLIEN	T	Biologie animale (P. C. B.).
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.).	EICHORN	T	Biologie végétale (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P. C. B.).
CHAZY	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	M ^{lle} CAUCHOIS	T	Chimie-Physique.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	THELLIER	T	
DUPONT	T	Théories chimiques.	AUDUBERT	T	Electrochimie.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	L'HERITIER	T	Génétique.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	GRIVET	T	Radio Electricité.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
Jacques BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
AÜBEL	T	Chimie biologique.	DUBREIL	T	Mathématiques générales.
M ^{me} JOLIO-CURIE	T	Physique générale et Radio-activité.	QUELET	T	Chimie (P. C. B.).
PLANTEFOL	T	Botanique.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CABANNES	T	Recherches physiques.	CHAMPETIER	T	Macromoléculaire.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	JUNG	T	Pétrographie.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	TRILLAT	T	Chimie Physique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	WIEMANN	T	Chimie (P. C. B.).
WYART	T	Minéralogie.	JACQUINOT	T	Physique (P. C. B.).
TEISSIES	T	Zoologie.	VASSY		Physique de l'atmosphère.
MANGEXOT	T	Biologie végétale.	DESTOUCHES		Théories physiques.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	M. PRUVOST	T	Géologie.
MONNIER	T	Physiologie générale.	AMIEL	T	Chimie (P. C. B.).
PIVETEAU	T	Géologie.	HOCART	T	Minéralogie.
ROCARD	T	Physique.	J. P. MATHIEU	T	Physique (P. C. B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E. N. Supérieure).	COUTEAUX		Biologie animale (B. C. P.).
LAFITTE	T	Chimie générale.	MAY		Biologie animale (P. C. B.).
FAVARD	T	Mécanique générale.	CHOQUET	T	Calcul différentiel.
COULOMB	T	Physique du Globe.	FELDMANN		Biologie (P. C. B.).
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P. C. B.).	GUINIER	T	Physique (P. C. B.).
CHRETIEN	T	Chimie minérale.	JOST	T	Biologie (P. C. B.).
P. DRACH	T	Zoologie.	FORTET		Calcul des probabilités.
KASTLER	T	Physique.	SCHWARTZ	T	Méthode Mathématique de la Physique.
EPHROSSI	T	Génétique.	CHOUARD	T	Physiologie Végétale.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	MALAVARD	T	Aviation.
RIVIERE	T	Géologie (P. C. B.).	BRELOT	T	Calcul différentiel.
GAUTHERET	T	Biologie Végétale (P. C. B.).	NORMANT	T	Chimie (P. C. B.).
			BÉNARD		Chimie (P. C. B.).
			BUVAT		Botanique (E. N. S.).
			DUGUE		Statistique mathématique.
			GELOSO		Chimie (P. C. B.).
			MARÉCHAL		Optique théorique et appliquée.
			SAULAIRAC		Psychophysiologie.
			ULRICH		Physiologie végétale.

Secrétaire CH. MONIER



A MES PARENTS
A MES FRÈRES, MES SOEURS

PREMIÈRE THÈSE

SUR UNE THEORIE RELATIVISTE
DES FLUIDES THERMODYNAMIQUES

INTRODUCTION

Ce travail vise à la construction d'une théorie relativiste des fluides thermodynamiques, dans le cadre de la Relativité générale. Il est consacré d'une part à la détermination des fondements d'une telle théorie, d'autre part à l'étude mathématique de la théorie ainsi obtenue.

Nous nous sommes efforcés de tenir le plus grand compte des bases classiques nécessaires à l'intelligence de la théorie et aux applications possibles. Inversement, notre théorie suggère une modification de certains résultats classiques concernant la thermodynamique des fluides en mouvement.

Cependant, c'est le point de vue relativiste qui nous intéresse ici, et cela pour plusieurs raisons.

Depuis les découvertes d'EINSTEIN, d'une importance capitale pour toute la Physique moderne, les phénomènes de la gravitation et de l'électromagnétisme ont fait l'objet de très beaux travaux. Mais, à part ces deux domaines privilégiés, il n'y a eu souvent ailleurs que des essais timides.

Cependant, comme la représentation de la matière s'effectue nécessairement en Relativité générale, par des schémas du type hydrodynamique, l'hydrodynamique relativiste a fait l'objet d'un exposé cohérent et rigoureux. Elle constitue ainsi le premier pas d'une théorie relativiste complète des milieux continus. Il nous est alors apparu qu'il était nécessaire de développer une théorie thermodynamique des fluides en mouvement. D'autre part, les phénomènes relativistes peuvent recevoir ainsi un principe d'évolution dans l'espace-temps, grâce à l'extension relativiste de la notion d'entropie.

* * *

Il est clair qu'une théorie relativiste des fluides thermodynamiques doit trouver ses bases dans les théories de l'hydrodynamique et de la chaleur.

Les premiers essais d'EINSTEIN, de PLANCK, consistent à étudier la nature des grandeurs thermodynamiques telles que la chaleur, la température, l'énergie, l'entropie à travers leur variance par rapport au groupe de LORENTZ. Puis, d'autres recherches ont visé à établir les équations du fluide thermodynamique, soit en relativité restreinte (C. ECKART), soit en relativité générale (D. VAN DANTZIG), mais d'une manière en général peu satisfaisante. VAN

DANTZIG se borna à l'étude des fluides qu'il nommait parfaitement parfaits, sans conduction de chaleur dans notre langage. Seul C. ECKART a introduit la conduction de chaleur, d'une façon symétrique, dans l'expression du tenseur d'impulsion-énergie. Malheureusement, sa généralisation de l'hypothèse de conduction de FOURIER se révèle fort peu naturelle: la température y est présente elle-même, à côté de ses dérivées. En fait, aucun de ces auteurs n'a effectivement utilisé l'équation de conduction thermique.

Finalement, les études antérieures se révèlent insuffisantes, aussi bien en ce qui concerne les principes d'une thermodynamique relativiste, que les fondements d'une théorie relativiste des fluides qui tienne compte des phénomènes de chaleur.

Aussi, il nous a paru nécessaire de reprendre la question à la base.

L'hydrodynamique classique est apparue après que CLAIRAUT eut donné dans sa théorie de la figure de la Terre, en 1743, les lois générales de l'équilibre des fluides soumis à des forces quelconques. La même année, D'ALEMBERT donnait dans son traité de Dynamique, un principe général permettant de déduire les équations du mouvement d'un système de corps, des équations qui règlent son équilibre. Ce principe devait permettre de déduire les équations générales de l'hydrodynamique, des équations générales de l'hydrostatique. Ce furent EULER et LAGRANGE qui, en perfectionnant la découverte de D'ALEMBERT, donnèrent aux équations de l'hydrodynamique, la forme sous laquelle elles sont utilisées aujourd'hui.

Le mérite revient à LAPLACE d'avoir le premier compris la nécessité, dans l'étude des mouvements des fluides, de tenir compte des variations de température qui accompagnent le mouvement.

La thermodynamique classique justifie l'extension du principe de D'ALEMBERT, aux fluides dont le potentiel interne par unité de volume est de la forme $\varphi(\rho, \theta)$ où ρ est la densité et θ la température.

Cependant, dans l'application du principe de D'ALEMBERT généralisé, on procède aux modifications virtuelles du système en deux stades:

a) une modification virtuelle compatible avec les liaisons à l'instant t et qui laisse invariante la température,

b) une modification de la température fixée au moyen de quelques hypothèses thermodynamiques.

On en déduit qu'en tout point du fluide, existe la relation ⁽¹⁾

$$\varphi(\rho, \theta) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho, \theta) + p = 0$$

⁽¹⁾ P. DUHEM, *Hydrodynamique · Elasticité · Acoustique* (A. Hermann, 1891).

où p représente la pression. C'est l'équation caractéristique du fluide. Elle fait intervenir en hydrodynamique un nouveau champ scalaire défini par θ . On doit alors faire intervenir une nouvelle relation demandée à la théorie de la Chaleur, en l'espèce l'équation de conduction thermique

$$\operatorname{div}(-\kappa \vec{\operatorname{grad}} \theta) = c\rho \frac{d\theta}{dt} - \frac{l}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

La décomposition précédente permet heureusement en Mécanique classique, d'établir les équations générales du fluide. Mais, si selon les principes de la relativité, on donne une inertie à l'énergie, de quelque origine soit-elle, on ne peut par ce procédé, obtenir les équations rigoureuses du fluide.

Pour avoir les équations rigoureuses des fluides thermodynamiques, il nous faut encore tenir compte de l'effet de la gravitation.

* * *

Ce sont ces raisons qui nous ont amenés à édifier une théorie des fluides thermodynamiques dans le cadre de la Relativité générale. Les théories classiques de l'hydrodynamique et de la chaleur nous serviront comme point de départ, de façon à suivre sans trop de difficulté l'interprétation physique.

Il nous apparaît comme suffisant de prendre pour éléments primitifs de notre théorie, les éléments suivants :

1°. - *un espace-temps de la Relativité générale* qui fait intervenir avec la rigueur souhaitée, la gravitation dans les phénomènes étudiés ;

2°. - *les équations d'Einstein*

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

qui établissent le lien logique entre le champ gravitationnel inclus dans les propriétés géométriques de l'espace-temps, et le champ de la matière qui constitue le siège des phénomènes thermodynamiques ;

3°. - le phénomène élémentaire de conduction thermique traduit par l'hypothèse de Fourier

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\operatorname{grad}} \theta$$

et le *principe de Carnot* qui conduit à la notion d'entropie.

* * *

Nous avons exposé précédemment les fondements axiomatiques de notre théorie.

Il nous reste à faire choix d'une méthode et d'une technique simple mais qui doit être féconde en résultats. Ces instruments de travail sont implicitement contenus dans la structure de variété riemannienne de l'espace-temps.

Aussi, nous avons consacré un chapitre préliminaire (chapitre I) à des considérations géométriques sur la variété espace-temps. La structure hyperbolique normale de cette variété s'y trouve précisée. Nous avons rappelé ce que l'on peut entendre, en relativité générale, par espace et temps. Cette définition donne lieu à des relations mathématiques très précises, fort importantes pour la suite de notre travail.

Puisque la variété espace-temps de la Relativité générale possède une structure locale d'espace-temps de MINKOWSKI, nous sommes conduits à utiliser au maximum cette propriété. D'autre part, il est indispensable que l'interprétation locale des événements rende compte des faits mécaniques et physiques connus.

La méthode qui se présente le plus naturellement, est d'adopter un repère galiléen local par rapport auquel le point considéré est au repos. Ce repère est appelé *repère propre*. Il suffit d'écrire, dans ce repère, les équations relatives à la matière au repos. Par un changement de repère, on en déduit l'expression générale invariante des équations relativement à un système de coordonnées curvilignes locales quelconques.

Cette méthode très simple présente quelque analogie avec le principe de D'ALEMBERT en Dynamique classique. Elle nous a permis, en partant des données de l'expérience, de construire toute la base axiomatique de notre théorie.

Au chapitre II, nous commençons par définir de manière précise la notion de *fluide relativiste*, caractérisé primitivement par une densité propre ρ à laquelle est attachée le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$. C'est là une description phénoménale dans l'univers spatio-temporel de la Physique. Puis, nous avons fait l'extension relativiste de la théorie de la chaleur, conformément aux idées essentielles de FOURIER. Enfin, se pose le problème du choix d'un tenseur d'impulsion-énergie, question primordiale puisque de ce choix découleront les équations fondamentales du champ.

Des considérations phénoménologiques ont conduit à adopter un tenseur de la forme

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \pi^{\alpha\beta} - Q^{\alpha\beta}.$$

Il sera déterminé, si nous connaissons les valeurs de ses composantes dans le repère propre associé à chaque point du fluide étudié. Ces valeurs sont aisément obtenues par la considération des propriétés de la matière en repos.

Nous avons terminé le chapitre II, en écrivant les équations générales du fluide thermodynamique quelconque, et aussi celles du fluide parfait thermodynamique.

L'étude de l'évolution du fluide ne peut être faite que grâce aux principes de la thermodynamique générale. Il est nécessaire de formuler une thermodynamique relativiste. D'ailleurs, on y est amené logiquement. En effet, la distinction entre énergie-travail et énergie-chaleur est conservée en Relativité. Elle se traduit par la nature géométrique différente du tenseur de la matière pure $\rho u^\alpha u^\beta$, qui fait intervenir un vecteur orienté dans le temps, du tenseur des pressions $\pi^{\alpha\beta}$ qui fait intervenir des vecteurs orientés dans l'espace et du tenseur thermodynamique $Q^{\alpha\beta} = u^\alpha q^\beta - u^\beta q^\alpha$ qui fait intervenir des vecteurs des deux espèces.

Or pour formuler une thermodynamique relativiste, les bases classiques sont indispensables. Il est utile de faire quelques remarques au sujet des principes classiques.

Dans le développement de la thermodynamique classique, on s'est généralement borné aux cas où :

1. - les systèmes thermodynamiques sont pratiquement au repos par rapport à l'observateur ;
2. - les systèmes considérés ne sont pas affectés par la gravitation.

On comprend alors, même du point de vue classique, la nécessité d'étudier du point de vue thermodynamique, les systèmes en mouvement. Les études antérieures ne nous ont pas paru entièrement satisfaisantes. Aussi, avons-nous repris la question pour un fluide classique en mouvement.

Dans la première partie du chapitre III, nous avons cherché à énoncer les principes appliqués au fluide, sous la forme différentielle. Nous en avons fourni une démonstration rigoureuse des équations, en les déduisant des égalités entre intégrales. Il nous a paru intéressant d'introduire un système de coordonnées curvilignes dans l'espace, le temps seul gardant sa définition classique habituelle.

L'introduction des coordonnées généralisées de LAGRANGE précise la notion de volume fluide. Il est remarquable qu'il offre la définition même du système au sens de la thermodynamique générale. Cela nous a permis d'appliquer les principes aux volumes fluides et d'en tirer les équations différentielles cherchées.

Au cours de cette étude, nous avons pu apporter une amélioration aux lois connues. Nous avons introduit le vecteur *chaleur entropique* $\vec{C} = \frac{\vec{q}}{\theta}$.

Cette définition est la conséquence de la distinction faite relativement aux quantités de chaleur produites sous différentes températures. Il se trouve qu'un effet de gradient de température intervient dans l'équation des principes. Et il n'y a pas lieu de le négliger, si les gradients de température sont élevés. Ce résultat semble nouveau et n'a jamais été jusqu'ici mis en lumière.

Dans la deuxième partie du chapitre III, nous avons commencé à donner

l'interprétation en termes de temps et d'espace, des équations relativistes du fluide. C'est l'opération inverse de la construction des lois relativistes. Cette interprétation se révèle satisfaisante, et montre que les principes classiques de conservation (de la matière, de l'énergie, de la quantité de mouvement) sont implicitement contenus dans les équations d'EINSTEIN.

En ce qui concerne les *principes*, seul le *second Principe* a reçu une extension relativiste. Pour cela, nous avons introduit une définition invariante de l'entropie, grâce à l'introduction d'une forme différentielle extérieure, la *forme entropie*.

Une fois l'axiomatique construite, il faut justifier les équations générales de la théorie. Nous avons adopté le point de vue mathématique. En effet, lorsque le schéma mathématique correspond exactement au concept physique, nous avons lieu de croire au bien-fondé de nos équations. Il reste seulement à voir si la théorie présente une cohérence interne, c'est-à-dire si les équations sont compatibles.

Nous avons donc étudié, dans le chapitre IV, à l'aide d'une analyse du problème de CAUCHY, la structure des équations fondamentales du champ relatif à un fluide parfait thermodynamique. La méthode a été introduite par M. G. DARMOIS et M. A. LICHNEROWICZ, en théorie relativiste de la gravitation et de l'électromagnétisme. Elle s'y était révélée féconde et se montre d'un emploi précieux dans notre théorie.

Cette étude montre non seulement la cohérence de la théorie construite, mais encore que les équations choisies sont satisfaisantes. En effet, ces équations nous ont conduit, dans l'étude des variétés exceptionnelles, à la solution de deux problèmes : celui de la propagation du son dans un milieu conducteur, et celui des ondes de choc, problème où l'on ne doit pas négliger les phénomènes d'échanges thermiques.

Nous avons clos notre travail par le chapitre V, consacré à l'étude des mouvements permanents des fluides thermodynamiques et des applications à des modèles d'univers thermodynamique stationnaires. Il s'agit là d'une extension des théorèmes globaux connus en théorie de la gravitation. Les résultats auxquels nous sommes arrivés, paraissent naturels et constituent un nouvel argument en faveur de nos équations.

* * *

Pour ne pas alourdir l'exposé, nous avons supposé la théorie des espaces de RIEMANN connue du lecteur. Ce dernier peut cependant se reporter avec profit aux *Eléments de calcul tensoriel* ou à l'*Algèbre linéaire*

de A. LICHNEROWICZ. Il trouvera un exposé d'ensemble des principes mathématiques des théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme dans son remarquable cours professé au Collège de France pendant les années 1952-1953 et 1953-1954.

Ce travail a vu le jour grâce à Monsieur A. LICHNEROWICZ dont j'ai suivi les enseignements depuis plusieurs années. Après m'avoir suggéré de l'entreprendre, il n'a cessé de prodiguer ses encouragements et ses conseils qui m'ont permis de mener à bien mes recherches.

Si quelque simplicité harmonieuse a pu être remarquée au cours de ce travail, je la dois principalement à son enseignement incomparable de clarté et de beauté, à ses qualités pédagogiques, et à l'admiration que je porte à son égard.

Qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde reconnaissance, de tout ce que je lui dois, autant sur le plan intellectuel que sur le plan moral.

Je tiens également à adresser ma respectueuse gratitude à Monsieur G. DARMOIS qui a montré de l'intérêt bienveillant à mes efforts et dont les conseils et les importants travaux m'ont aidé à pénétrer les problèmes actuels qui font l'objet de ma thèse.

Enfin, je prie Madame M. A. TONNELAT, qui a suivi avec beaucoup de sympathie mes recherches, de trouver ici l'expression de mes très respectueux remerciements.

Paris, Juin 1954.

NOTATIONS ET SYMBOLES

$\alpha, \beta, \dots, \lambda$: tout indice grec prend les valeurs 0, 1, 2, 3.

$i, j, \dots, l$: tout indice latin prend les valeurs 1, 2, 3.

x^α : système de coordonnées curvilignès quelconque.

$f(x^\alpha)$: fonction scalaire de x^α .

v : vecteur.

$T^{\alpha\beta}, T_\beta^\alpha, T_{\alpha\beta}$: tenseurs.

Indices supérieurs: indices contravariants.

Indices inférieurs: indices covariants.

Convention d'Einstein: Toutes les fois que dans un monôme figure deux fois le même indice, une fois en indice supérieur et une fois en indice inférieur, on doit, sauf avis contraire, sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles.

Exemples:

$$d\vec{x} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 \omega^\alpha \vec{e}_\alpha$$

$$R = R_\alpha^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 R_\alpha^\alpha.$$

Forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta$$

$g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique fondamental ou tenseur de gravitation.

$g^{\alpha\beta}$ est son tenseur conjugué.

$[\alpha\beta, \gamma]$: symbole de CHRISTOFFEL de 1ère espèce

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}).$$

$\left\{ \begin{smallmatrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right\} = \Gamma_\alpha^\gamma{}_\beta = g^{\gamma\delta} [\alpha\beta, \delta]$: symbole de CHRISTOFFEL de seconde espèce.

$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, $\partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$, dérivées partielles.

$\nabla_\alpha, \nabla_{\alpha\beta}, \dots$, dérivées covariantes.

$\triangle_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f$, premier paramètre différentiel de BELTRAMI.

$\triangle_2 f \equiv g^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\beta} f - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \partial_\rho f)$, second paramètre différentiel de BELTRAMI ou laplacien de la fonction f .

$R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la variété riemannienne V_4 , déduit du tenseur de courbure de RIEMANN-CHRISTOFFEL

$$R_{\lambda\alpha, \beta}^\mu = \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\lambda\beta}^\rho$$

par contraction des indices λ et μ :

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \partial_\alpha \Gamma_{\sigma\beta}^\sigma + \Gamma_{\sigma\rho}^\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\rho.$$

Par contraction de $R_{\alpha\beta}$, on obtient l'invariant

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}.$$

CHAPITRE I.

CONSIDERATIONS GEOMETRIQUES GENERALES

1. La variété espace-temps.

Dans la théorie de la relativité générale, l'élément géométrique est l'espace-temps. C'est une variété à quatre dimensions V_4 , douée d'une structure de variété différentiable qu'il est utile de préciser.

R^n désigne l'espace numérique des variables réelles x^α .

Une fonction φ à valeurs numériques définie dans R^n est dite de classe C^u , si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre u .

Une fonction ψ définie dans un domaine D de R^n sera dite de classe C^v par morceaux, si elle admet la classe C^v dans D , excepté sur des surfaces de discontinuité S en nombre fini. Dans chacun des voisinages d'une surface S :

1. - ψ est une fonction de classe C^v .

2. - ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre v tendent uniformément vers des limites déterminées différentes de part et d'autre en chaque point de S .

La variété espace-temps V_4 satisfait aux hypothèses suivantes :

a. - V_4 est un espace topologique connexe dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à l'intérieur d'une sphère de l'espace euclidien à quatre dimensions.

b. - Les systèmes de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) dans V_4 forment une famille A , satisfaisant aux deux conditions suivantes :

A1. - Leurs domaines recouvrent entièrement V_4 .

A2. - Un point $x \in V_4$ variant dans la partie commune aux domaines de deux systèmes de la famille A , les coordonnées de x relativement à l'un des systèmes, sont des fonctions de classe C^2 à jacobien non nul, de ses coordonnées relativement à l'autre système.

Les problèmes fondamentaux de la théorie exigent en outre l'hypothèse suivante qui complète A2 :

Dans l'intersection des domaines de deux systèmes de coordonnées, les dérivées secondes du changement de coordonnées sont des fonctions de classe C^2 par morceaux.

Il résulte de ces hypothèses qu'une fonction $f(x)$ définie sur V_4 , peut être de classe C^u ($u = 2$), et que les composantes d'un tenseur dans V_4 peuvent être des fonctions de classe C^r ($r \leq 1$) et de classe C^{r+2} par morceaux.

Sur la variété V_4 , nous supposons définie une métrique riemannienne ds^2 , partout du type hyperbolique normal, par la donnée d'un champ de tenseurs covariants symétriques à deux indices $g_{\alpha\beta}$, appelé tenseur fondamental de gravitation. Soit

$$(1.1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta, \lambda = 0, 1, 2, 3).$$

Les coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont appelés les potentiels de gravitation. Ce sont des fonctions de classe C^1 et leurs dérivées $\partial_\gamma g_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de classe C^2 par morceaux.

L'hypothèse faite sur le type hyperbolique normal de la métrique de V_4 , veut dire qu'en chaque point $x \in V_4$, le ds^2 peut se mettre localement sous la forme

$$(1.2) \quad ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

où les ω^α forment un système de formes de PFAFF locales linéairement indépendantes.

2. Orientation dans l'espace et le temps.

L'équation

$$ds^2 = 0$$

définit en chaque point x de V_4 , un cône réel Γ_x de directions tangentes à V_4 . Ce cône sera dit cône élémentaire en x . L'intérieur du cône Γ_x est défini tel que $ds^2 > 0$; l'extérieur du cône est tel que $ds^2 < 0$.

1. - Une direction $\vec{dx}$ est dite orientée dans le temps ou dans l'espace selon qu'elle est intérieure ou extérieure au cône élémentaire. Si la direction $\vec{dx}$ est orientée dans le temps :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta > 0$$

si elle est orientée dans l'espace :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta < 0$$

et réciproquement.

Une ligne C est dite orientée dans le temps, si les tangentes en tous ses points sont orientées dans le temps. On a alors, le long de C :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta > 0.$$

La ligne C est dite orientée dans l'espace, si $ds^2 < 0$.

2. - Un 2 ou 3-plan élémentaire tangent en x à V_4 , est dit orienté dans l'espace, si toutes ses directions sont orientées dans l'espace. Il est orienté dans le temps, s'il admet des directions orientées dans le temps.

Si nous considérons une direction v_α , le 3-plan élémentaire Π_x qui lui est perpendiculaire, est défini par l'équation

$$v_\alpha dx^\alpha = 0.$$

La direction v_α est conjuguée du 3-plan Π_x , par rapport au cône élémentaire Γ_x . Si Π_x est orienté dans l'espace, la direction v_α est orientée dans le temps et réciproquement. Il en résulte que Π_x est orienté dans l'espace, si

$$g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta > 0$$

et que Π_x est orienté dans le temps, si :

$$g^{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta < 0.$$

Une hypersurface S de V_4 est un espace à trois dimensions plongé dans V_4 . Elle est dite orientée dans l'espace, si tous ses éléments plans tangents aux différents points, sont orientés dans l'espace. Si l'hypersurface S est définie localement par l'équation :

$$f(x^\lambda) = 0$$

l'élément-plan tangent en un point x de S , est perpendiculaire à la direction $\partial_\alpha f$. Par conséquent, si l'hypersurface S est orientée dans l'espace, on a en tout point de S :

$$\Delta_i f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f > 0.$$

L'hypersurface S sera orientée dans le temps si on a sur S : $\Delta_i f < 0$ partout.

3. Temps et espace associés. Composante de temps et composante d'espace d'un vecteur.

Soit $\vec{\eta}$ un vecteur unitaire orienté dans le temps, et défini en un point x de V_4 .

$$(\vec{\eta})^2 = +1.$$

Le tri-plan élémentaire Π_x , d'équation

$$\eta_\alpha dx^\alpha = 0$$

est orthogonal au vecteur $\vec{\eta}$ et orienté dans l'espace.

Nous dirons que $\vec{\eta}$ et Π_x définissent en x , un temps et un espace associés.

Un vecteur quelconque $\vec{X}$ défini en x , a par rapport à $\vec{\eta}$ et Π_x , une composante colinéaire à $\vec{\eta}$:

$$(\vec{X} \cdot \vec{\eta}) \vec{\eta}$$

dite composante de temps, et une composante $\vec{X}^*$ dans Π_x perpendiculaire à $\vec{\eta}$

$$\vec{X}^* \cdot \vec{\eta} = 0$$

dite composante d'espace de $\vec{X}$.

Le vecteur $\vec{X}$ se trouve ainsi décomposé comme la somme de ces deux composantes :

$$\vec{X} = (\vec{X} \cdot \vec{\eta}) \vec{\eta} + \vec{X}^*.$$

A toute décomposition en carrés de la métrique de V_4 :

$$(1.2) \quad ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

correspondent une base (ω^0, ω^i) pour les formes linéaires locales définies en x , et un repère $(x; \vec{e}_0, \vec{e}_i)$ pour l'espace tangent T_x en x à V_4 . L'indice i prend les valeurs 1, 2, 3.

Nous avons

$$d\vec{x} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha$$

et

$$ds^2 = (d\vec{x})^2 = (\omega^\alpha \vec{e}_\alpha) \cdot (\omega^\beta \vec{e}_\beta) = (\omega^\alpha \omega^\beta) \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta.$$

La comparaison de cette égalité à la décomposition (1.2) donne :

$$(\vec{e}_0)^2 = +1$$

$$(\vec{e}_i)^2 = -1$$

$$\vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^\beta = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta.$$

Un tel repère $(\vec{e}_0, \vec{e}_i)$ est dit repère orthonormé en x .

Le vecteur $\vec{e}_0$ est orienté dans le temps. Les trois vecteurs $\vec{e}_i$ sont orientés dans l'espace. Ils définissent un 3-plan $(\vec{e}_i)$ orthogonal à $\vec{e}_0$ et orienté dans l'espace. Le vecteur $\vec{e}_0$ et le tri-plan $(\vec{e}_i)$ définissent donc un temps et un espace associés au point x de V_4 .

La décomposition (1.2) montre que la métrique ds^2 introduite, définit dans V_4 une structure d'espace de MINKOWSKI. Rapporté à un repère orthonormé, l'espace de MINKOWSKI tangent T_x doit être identifié à un espace-temps de la relativité restreinte, rapporté à un repère galiléen. Sa considération est fort utile.

Ainsi, un tenseur peut être défini en un point x de V_4 par ses composantes relativement à un repère galiléen local. Ses composantes générales quelconques se déduisent des premières par des formules de transformation connues.

Réciproquement, l'interprétation d'un tenseur défini en un point x de V_4 , se déduit de l'espace de MINKOWSKI tangent. On aura ainsi les interprétations physiques en termes de temps et d'espace.

4. Utilisation d'un repère galiléen local.

Soit le repère galiléen local $(x, \vec{V}^{(\lambda)})$. Introduisons les symboles suivants :

$$\delta_{\lambda'\mu'} = \vec{V}^{(\lambda')} \cdot \vec{V}^{(\mu')} = \begin{cases} +1 & \text{si } \lambda' = \mu' = 0 \\ -1 & \text{si } \lambda' = \mu' = i \\ 0 & \text{si } \lambda' \neq \mu'. \end{cases}$$

Supposons qu'on rapporte l'espace-temps V_4 à un repère quelconque $(x, \vec{e}_\lambda)$ qui pourra être en particulier le repère naturel en x associé à un système de coordonnées curvilignes locales. La matrice du changement de repère est notée $(A_\alpha^{\lambda'})$. Nous avons les formules de transformation :

$$g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\lambda'} A_\beta^{\mu'} \delta_{\lambda'\mu'}.$$

Les $A_\alpha^{\lambda'}$ ne sont autre chose que les composantes $V_\alpha^{(\lambda')}$ du vecteur $\vec{V}^{(\lambda')}$ dans le repère naturel.

Nous en déduisons l'expression des composantes du tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ en fonction des composantes des vecteurs $\vec{V}^{(i)}$ du repère galiléen local :

$$(4.1) \quad g_{\alpha\beta} = V_{\alpha}^{(0)} V_{\beta}^{(0)} - \sum_{i=1}^3 V_{\alpha}^{(i)} V_{\beta}^{(i)}$$

Si $\vec{X}$ est un vecteur quelconque défini en x , sa composante d'espace $\vec{X}^*$ relativement au vecteur unitaire orienté dans le temps $\vec{V}^{(0)}$, a pour valeur :

$$\vec{X}^* = \vec{X} - (\vec{X} \cdot \vec{V}^{(0)}) \vec{V}^{(0)}.$$

On en déduit les composantes de $\vec{X}^*$ dans le repère naturel

$$X^{*\lambda} = X^{\lambda} - (X^{\alpha} V_{\alpha}^{(0)}) V^{(0)\lambda}.$$

Elles s'écrivent encore :

$$(4.2) \quad X^{*\lambda} = X^{\alpha} (g_{\alpha}^{\lambda} - V_{\alpha}^{(0)} V^{(0)\lambda}).$$

On vérifie par les égalités (4.1) que

$$X^{*\lambda} = - \sum_{i=1}^3 (V_{\alpha}^{(i)} X^{\alpha}) V^{(i)\lambda}.$$

Nous appellerons grandeur d'espace du vecteur $\vec{X}$, le carré de sa composante d'espace $\vec{X}^*$. Elle a pour valeur :

$$(\vec{X}^*)^2 = g_{\lambda\mu} X^{\lambda} X^{\mu} - (X^{\lambda} V_{\lambda}^{(0)})^2.$$

C'est une quantité négative ou nulle.

Nous appellerons grandeur de temps du vecteur $\vec{X}$, le carré de sa composante de temps. Elle a pour valeur

$$(X^{\lambda} V_{\lambda}^{(0)})^2.$$

5. Le système des équations d'Einstein.

En relativité générale, les propriétés géométriques de l'espace-temps rendent compte des phénomènes purement gravitationnels. Le premier pas de la théorie générale du fluide (supposé représenter la matière et l'énergie), consiste à choisir un système tensoriel d'équations aux dérivées partielles qui limitent la généralité des potentiels $g_{\alpha\beta}$ du tenseur fondamental de gravitation, en le reliant aux distributions énergétiques dans l'espace-temps.

Dans le cas gravitationnel pur, ces équations devront généraliser l'équation de LAPLACE-POISSON qui détermine localement le potentiel newtonien.

Des considérations dues à EINSTEIN ont conduit à adopter le système d'équations

$$(5.1) \quad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où $S_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ sont deux tenseurs symétriques et χ désigne un facteur constant.

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ de signification purement physique, doit décrire au mieux, en chaque point de l'espace-temps V_4 , l'état de la distribution énergétique (cas intérieur) ou bien, dans les régions de V_4 non balayées par l'énergie, doit être identiquement nul (cas extérieur). Ce tenseur sera appelé tenseur d'impulsion-énergie ou plus brièvement tenseur d'énergie.

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ de signification essentiellement géométrique, est astreint aux conditions suivantes :

1. - il ne dépend que des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées des deux premiers ordres, et doit être linéaire par rapport aux dérivées du second ordre.

2. - il est conservatif, c'est-à-dire satisfait aux quatre conditions suivantes appelées conditions de conservation

$$(5.2) \quad \nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = 0$$

∇_α désigne l'opérateur de dérivation covariante dans V_4 .

ELIE CARTAN a démontré que les seuls tenseurs $S_{\alpha\beta}$ satisfaisant à ces conditions, sont données par la formule

$$S_{\alpha\beta} = h \left[R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (R + k) g_{\alpha\beta} \right]$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la variété riemannienne V_4 .

$$(5.3) \quad R_{\alpha\beta} = \partial_\rho \Gamma_{\alpha}^{\rho}{}_{\beta} - \partial_\alpha \Gamma_{\rho}^{\rho}{}_{\beta} + \Gamma_{\sigma}^{\sigma}{}_{\rho} \Gamma_{\alpha}^{\rho}{}_{\beta} - \Gamma_{\alpha}^{\sigma}{}_{\rho} \Gamma_{\sigma}^{\rho}{}_{\beta}$$

et R , l'invariant $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. h et k sont deux constantes arbitraires.

En supprimant le facteur surabondant h , les équations aux dérivées partielles (5.1) correspondantes, s'écrivent :

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (R + k) g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

La constante k , appelée constante cosmologique, n'intervient guère que dans les études de cosmologie. Comme les problèmes d'ordre mathématique restent les mêmes, nous raisonnerons sur les équations :

$$(5.4) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

qui sont celles du cas intérieur, et les équations

$$(5.5) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0$$

qui sont celles du cas extérieur.

Les équations (5.4), (5.5) seront respectivement appelées les équations d'EINSTEIN du cas intérieur et du cas extérieur.

CHAPITRE II.

LE FLUIDE THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE AXIOMATIQUE ET EQUATIONS GENERALES

I. - Définitions générales.

6. Définition et propriétés générales.

Un fluide relativiste peut être considéré comme un milieu matériel continu, déformable, doué des propriétés suivantes :

1. - il possède une densité propre ρ .
2. - il est possible de définir un vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ pour chaque point du milieu.

Nous dirons plus brièvement fluide pour fluide relativiste.

Du point de vue physique, le fluide est généralement doué de propriétés diverses. Chacune de ces propriétés peut se traduire par les valeurs de certaines quantités scalaires ou tensorielles qu'on appelle caractéristiques du fluide.

Ainsi les forces de liaisons internes entre divers éléments du fluide, sont susceptibles d'être représentées par un tenseur symétrique à deux indices $\pi_{\alpha\beta}$. Ce tenseur est dit tenseur des pressions propres. Il joue un rôle fondamental dans les considérations dynamiques ou thermodynamiques sur le fluide.

Le fluide est le siège de phénomènes physiques correspondant à la chaleur, au rayonnement, à l'électromagnétisme... Il convient de définir dans chaque cas des caractéristiques appropriées. Ainsi les phénomènes électromagnétiques sont susceptibles d'être représentés par un tenseur anti-symétrique à deux indices $F_{\alpha\beta}$, dit tenseur champ électromagnétique. Ainsi les propriétés thermodynamiques du fluide s'expriment à l'aide d'un champ scalaire θ , dit champ de *température*.

Le fluide envisagé est dit thermodynamique, lorsque les phénomènes calorifiques ne sont pas négligés. Un tel fluide fait intervenir non seulement les données habituelles du fluide relativiste : *vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, densité propre ρ , tenseur des pressions propres $\pi_{\alpha\beta}$* , mais encore un champ scalaire θ dit *champ des températures propres*.

Dans notre étude, nous nous limiterons au cas des fluides isotropes, dépourvus de tout phénomène chimique. Au cours des raisonnements, il est sous-entendu que les diverses grandeurs physiques sont exprimées en unités convenables, dans un système d'unités où la vitesse limite de propagation des phénomènes physiques est prise comme unité. Les quantités de chaleur s'exprimeront en unités d'énergie.

La fonction scalaire θ qui représente la température est supposée de classe $(C^2, C^4$ par morceaux).

7. Espace-temps riemannien associé à un fluide.

Dans la théorie générale des fluides thermodynamiques qui sera développée, nous représenterons le fluide considéré par un domaine connexe de l'espace-temps V_4 , variété différentiable à quatre dimensions, de classe C^2 et de classe C^4 par morceaux, douée de la métrique d'univers :

$$(7.1) \quad ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\lambda) dx^\alpha dx^\beta$$

de type hyperbolique normal.

Les $g_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de classe C^4 et de classe C^3 par morceaux.

Considérons, dans la variété espace-temps V_4 , un domaine occupé par un milieu fluide. Nous dirons que l'espace-temps riemannien V_4 est associé à ce fluide.

$\vec{u}$ désignera le vecteur vitesse unitaire en chaque point du fluide. Ses trajectoires, orientées dans le temps, seront appelées lignes de courant.

On appellera *repère propre* en un point du domaine de l'espace-temps, occupé par le fluide, un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{V}^{(0)}$ coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ et dont les trois autres vecteurs $\vec{V}^{(i)}$ orientés dans l'espace, sont normés par la condition $(\vec{V}^{(i)})^2 = -1$.

Ainsi

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta &= +1 \\ g_{\alpha\beta} V^{(i)\alpha} V^{(i)\beta} &= -1. \end{aligned}$$

Ce repère propre doit être identifié à un repère galiléen local. L'axe de temps a la direction du vecteur $\vec{u}$. L'espace associé est défini par le tri-plan $(\vec{V}^{(i)})$.

On peut naturellement rapporter le voisinage d'un point de V_4 au repère propre en ce point.

Le repère propre qui a été introduit, est caractérisé par la matrice

$$(\delta_{\alpha'\beta'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La métrique d'univers de V_4 prend la forme

$$(7.3) \quad ds^2 = \delta_{\alpha'\beta'} \omega^{\alpha'} \omega^{\beta'} = (\omega^{0'})^2 - (\omega^{1'})^2 - (\omega^{2'})^2 - (\omega^{3'})^2.$$

Dans la théorie de la relativité générale, l'univers est regardé comme une variété dont les systèmes de référence en un point se repèrent entre

eux comme dans la relativité restreinte : dans celle-ci l'espace-temps rapporté au repère propre admet la métrique

$$(7.4) \quad ds^2 = (dx^{0'})^2 - (dx^{1'})^2 - (dx^{2'})^2 - (dx^{3'})^2$$

où $x^{0'} = ct$, c étant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. Cette remarque permet de faire l'interprétation en termes de temps et d'espace, des équations de la relativité générale.

Si, au point considéré, l'espace-temps est rapporté à un repère quelconque, ce point est défini par des coordonnées curvilignes locales x^α , et la métrique d'univers a la forme $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. Les $g_{\alpha\beta}$ sont donnés en fonction des composantes des vecteurs du repère propre, par les formules :

$$(7.5) \quad g_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - \sum_{i=1}^3 V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)}$$

comme on a vu au § 4.

Soit $\vec{q}$ un vecteur défini au point considéré. La composante de temps de $\vec{q}$ est sa projection sur $\vec{u}$. Elle a pour composantes dans le repère naturel

$$(7.6) \quad (\vec{u} \cdot \vec{q}) u_\alpha = (u^\rho q_\rho) u_\alpha.$$

Sa composante d'espace est sa projection sur l'élément-plan normal à $\vec{u}$. Elle est définie par ses composantes en repère naturel :

$$(7.7) \quad q_\alpha^* = q_\alpha - (u^\rho q_\rho) u_\alpha \equiv q_\rho (g_\alpha^\rho - u^\rho u_\alpha).$$

II. - La conduction de la chaleur.

8. L'hypothèse de Fourier en relativité.

La conduction thermique dans un milieu fluide peut être rendue compte au moyen de l'hypothèse de FOURIER. Nous nous proposons de faire une extension relativiste de cette hypothèse.

Considérons à cet effet, un domaine D de l'espace-temps associé au milieu conducteur. En un point x de ce domaine, la conduction thermique est liée à un vecteur $\vec{q}$ appelé *vecteur courant de chaleur*.

Par rapport au repère propre en ce point, ce vecteur a pour composantes

$$(8.1) \quad \begin{aligned} q_0' &= 0 \\ q_i' &= -\kappa \partial_i \theta \end{aligned}$$

où θ désigne le champ scalaire de température et ∂_i la dérivée pfaffienne relatives aux formes ω^i .

κ est un coefficient thermodynamique appelé conductivité thermique du milieu. Il dépend de la nature du milieu. Pour un milieu isotrope, il garde la même valeur dans toutes les directions. Mais κ peut varier avec l'état du milieu, et en particulier, il varie avec la température θ . Sa connaissance est demandée à l'expérience.

Il est nécessaire de savoir que le coefficient κ actuel est égal au coefficient de conductivité en unités *CGS*, divisé par la vitesse limite c , exprimée avec les mêmes unités.

Le vecteur $q_{\lambda'}$ est un vecteur d'espace. Ses composantes contravariantes ont pour valeurs dans le repère propre :

$$(8.2) \quad q^{\lambda'} = -q_{\lambda'}.$$

Rapportons maintenant l'espace-temps au point considéré à un repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes x^α . La matrice de passage d'un repère à l'autre est $(A^\alpha_{\lambda'})$. Soit $(A^{\alpha'}_{\lambda})$ la matrice inverse. Les $A^\alpha_{\lambda'}$ sont les composantes contravariantes des vecteurs $V^{(i)}$ du repère propre dans le nouveau repère. Soit

$$(8.3) \quad \begin{aligned} A^\alpha_{0'} &= u^\alpha & A^{0'}_{\alpha} &= u_\alpha \\ A^\alpha_{i'} &= V^{(i)\alpha} & A^{i'}_{\alpha} &= -V^{(i)}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Dans ces formules et dans celles qui suivent, on donne la même valeur numérique à deux indices ne différant que par l'accent '.

Nous passons des composantes $q_{\lambda'}$ du vecteur $\vec{q}$ dans le repère propre, à ses composantes covariantes générales quelconques q_α , par les formules :

$$q_\alpha = q_{\lambda'} A^{\lambda'}_{\alpha} = q_{i'} A^{i'}_{\alpha}.$$

D'autre part dans le changement de repères

$$\partial_{i'} \theta = \partial_\rho \theta A^\rho_{i'}$$

et par suite

$$q_{i'} = -\kappa \partial_\rho \theta A^\rho_{i'}.$$

En portant cette valeur de $q_{i'}$ dans les relations précédentes, nous obtenons

$$q_\alpha = -\kappa \partial_\rho \theta A^\rho_{i'} A^{i'}_{\alpha} = -\kappa \partial_\rho \theta \left(- \sum_{i=1}^3 V^{(i)\rho} V^{(i)}_{\alpha} \right).$$

D'après la formule (7.5) du paragraphe précédent, $-\sum_{i=1}^3 V^{(i)\rho} V^{(i)}_{\alpha} = g^\rho_{\alpha} - u^\rho u_\alpha$. Nous en déduisons

$$(8.4) \quad q_\alpha = -\kappa \partial_\rho \theta (g^\rho_{\alpha} - u^\rho u_\alpha)$$

en remarquant que les q_α sont les composantes d'espace du vecteur $-\kappa \vec{\text{grad}} \theta$.

Le vecteur $\vec{q}$ représente le flux de chaleur à travers une surface normale à la direction q_α , par unité de surface et de temps. Dans l'espace-temps V_4 , on pourrait dire que $\vec{q}$ permet de définir le flux de chaleur à travers un élément 3-plan orienté dans le temps.

On peut donner à q_α l'expression équivalente à (8.4)

$$(8.5) \quad q_\alpha = -\kappa[\partial_\alpha \theta - (u^\rho \partial_\rho \theta) u_\alpha].$$

Par montée de l'indice α , on déduit ses composantes contravariantes q^α :

$$q^\alpha = -\kappa[\partial^\alpha \theta - (u^\rho \partial_\rho \theta) u^\alpha]$$

où l'on a posé $\partial^\alpha \theta = g^{\alpha\lambda} \partial_\lambda \theta$.

En calculant le produit contracté $u^\alpha q_\alpha = u_\alpha q^\alpha$, on vérifie que:

$$(8.6) \quad u^\alpha q_\alpha \equiv u_\alpha q^\alpha \equiv 0.$$

Cette identité appelle deux remarques:

1. $-\vec{q}$ est un vecteur purement spatial, normal au vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$. Sa grandeur est donc négative.

$$(8.7) \quad (\vec{q})^2 = \kappa^2(\Delta_\perp \theta - Z^2) \leq 0 \quad (Z = u^\rho \partial_\rho \theta).$$

2. - l'identité $u_\alpha q^\alpha \equiv 0$ traduit en un certain sens l'absence de toute « densité de charge calorifique ».

DÉFINITION. - On appellera *lignes de chaleur*, les trajectoires du champ de vecteur-courant de chaleur $\vec{q}$.

Ces lignes orientées dans l'espace, sont orthogonales aux lignes de courant. Elles interviennent pour la description de certains phénomènes calorifiques.

9. Chaleur dégagée par un élément quadridimensionnel de fluide.

Soit un domaine D_4 de l'espace-temps, occupé par un fluide thermodynamique. Nous pouvons considérer des éléments quadridimensionnels de ce fluide enfermés dans les éléments d'hypervolume

$$(9.1) \quad d\tau = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

de l'espace-temps associé; et nous pouvons suivre leur évolution grâce au repère naturel attaché à chaque élément. Mais, pour en dégager plus facilement le sens, nous rapportons chaque élément d'abord aux repères propres.

L'élément de fluide au point $x \in D_4$, est caractérisé dans le repère propre, avant la modification, par sa masse m , son volume ordinaire $\omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}$ et sa température θ . Dans l'étude des modifications d'état, on introduit le volume spécifique

$$(9.2) \quad \bar{\omega} = \frac{1}{\rho}$$

où ρ est la densité propre du fluide en x .

Après la modification élémentaire, cet élément de fluide a un volume spécifique $\bar{\omega} + d\bar{\omega}$ et une température $\theta + d\theta$. Au cours de cette modification d'état, une quantité de chaleur Q_e est mise en jeu et est égale à:

$$(9.3) \quad Q_e = c d\theta \wedge m + l d\bar{\omega} \wedge m.$$

Les coefficients calorifiques c et l s'appellent respectivement la chaleur spécifique à volume constant et la chaleur de dilatation du fluide. Ce sont, en général, des fonctions de $\bar{\omega}$ et θ , ou, ce qui revient au même, de ρ et θ .

$$(9.4) \quad c = c(\rho, \theta) \quad l = l(\rho, \theta).$$

Nous avons introduit dans (9.3) la forme différentielle extérieure m ou forme élément de matière. Elle a pour composante non nulle dans le repère propre

$$m = \rho u^{0'} \omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}.$$

Sous forme invariante, nous la définirons par :

$$m = \frac{1}{3!} \eta_{\alpha_0' \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'} \rho u^{\alpha_0'} \omega^{\alpha_1'} \wedge \omega^{\alpha_2'} \wedge \omega^{\alpha_3'}$$

où $\eta_{\alpha_0' \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume spatio-temporel.

θ et $\bar{\omega}$ sont des fonctions scalaires définies en $x \in D_4$ (formes d'ordre zéro). Nous avons :

$$\begin{aligned} d\theta &= \partial_{\alpha'} \theta \omega^{\alpha'} \\ d\bar{\omega} &= \partial_{\alpha'} \bar{\omega} \omega^{\alpha'} = -\frac{1}{\rho^2} \partial_{\alpha'} \rho \omega^{\alpha'}. \end{aligned}$$

Dans ces formules, $\partial_{\alpha'}$ désigne la dérivée pfaffienne.

La quantité Q_e a alors pour expression :

$$Q_e = \left(c \partial_{\alpha'} \theta \omega^{\alpha'} - \frac{l}{\rho^2} \partial_{\alpha'} \rho \omega^{\alpha'} \right) \wedge \frac{1}{3!} \eta_{\alpha_0' \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'} \rho u^{\alpha_0'} \omega^{\alpha_1'} \wedge \omega^{\alpha_2'} \wedge \omega^{\alpha_3'}.$$

En effectuant les calculs, nous aurons :

$$(9.5) \quad Q_e = \left(c \rho u^{0'} \partial_{\rho'} \theta - \frac{l}{\rho} u^{0'} \partial_{\rho'} \rho \right) \frac{1}{4!} \eta_{\alpha_0' \alpha_1' \alpha_2' \alpha_3'} \omega^{\alpha_0'} \wedge \omega^{\alpha_1'} \wedge \omega^{\alpha_2'} \wedge \omega^{\alpha_3'}.$$

Le second facteur n'est autre que la forme élément de volume. Il vient finalement (repère propre)

$$Q_e = \left(c \rho u^{0'} \partial_{\rho'} \theta - \frac{l}{\rho} u^{0'} \partial_{\rho'} \rho \right) \omega^{0'} \wedge \omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}.$$

Si nous rapportons maintenant l'espace-temps au point considéré, au repère naturel associé à un système de coordonnées curvilignes locales x^α , la formule (9.6) prend la forme invariante que l'on déduit de (9.5)

$$(9.7) \quad Q_e = \left(c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

C'est cette quantité que nous appelons la chaleur dégagée relative à un élément quadridimensionnel de fluide attaché au point (x^α) quand ce point vient au point voisin $(x^\alpha + dx^\alpha)$.

On remarque que $u^\alpha \partial_\alpha \theta$ et $u^\alpha \partial_\alpha \rho$ sont les projections sur $\vec{u}$ des vecteurs $\vec{\text{grad}} \theta$ et $\vec{\text{grad}} \rho$: ce sont les variations de la température θ et de la densité ρ le long des lignes de courant.

10. L'équation relativiste de la conduction thermique.

Le vecteur courant de chaleur $\vec{q}$ qui a été défini au § 8, satisfait à une formule de divergence appelée équation de conduction. Nous allons en établir l'expression relativiste.

Considérons un domaine D_4 de l'espace-temps occupé par un fluide thermodynamique conducteur.

Choisissons dans le domaine D_4 , un volume à quatre dimensions B_4 limité par un tube de courant S et par deux sections de ce tube Σ_1 et Σ_2 qui sont des hypersurfaces *engendrées par les lignes de chaleur*. Nous les appelons brièvement sections d'espace.

Nous supposons dans la suite, que les différentes grandeurs introduites sont continues et à dérivées continues dans le volume B_4 .

Adoptons des coordonnées telles que les lignes sur lesquelles la coordonnée x^0 varie seule, coïncident avec les lignes de courant. De cette façon, nous pouvons suivre chaque élément de volume quadridimensionnel $d\tau$ le long de la ligne de courant $x^i = \text{const.}$ qui le traverse.

En intégrant Q_e le long de cette ligne de courant, nous avons la quantité de chaleur dégagée, au sens que nous avons donné à ce mot, dans le tube d'univers infiniment mince où varie l'élément $d\tau$. En sommant ensuite sur tous les tubes d'univers infiniment minces constituant le tube envisagé, et en passant à la limite, nous obtiendrons l'intégrale :

$$(10.1) \quad Q = \iiint_{B_4} \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

étendue au domaine B_4 considéré.

Par définition, la valeur Q de cette intégrale est la quantité de chaleur dégagée relative au volume B_4 .

Le postulat de la continuité de la chaleur consiste à affirmer que cette quantité Q est égale au flux à travers la surface latérale du tube de courant, du vecteur-courant de chaleur $\vec{q}$. Grâce au choix particulier de notre domaine, elle est égale au flux de $\vec{q}$ à travers la frontière ∂B_4 du domaine B_4 , car les deux sections Σ_1 et Σ_2 étant engendrées par des lignes de chaleur, le vecteur $\vec{q}$ leur est tangent et son flux à travers Σ_1 et Σ_2 est nul.

Si $d\omega_\alpha$ désigne l'élément d'hypersurface qui limite le domaine B_4 , nous avons l'égalité :

$$(10.2) \quad \iiint_{B_4} \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_{\partial B_4} q^\alpha d\omega_\alpha.$$

En transformant par la formule de STOKES, la première intégrale du flux, en intégrale de divergence, nous écrivons cette égalité sous la forme équivalente :

$$(10.3) \quad \iiint_{B_4} \left[\nabla_\alpha q^\alpha - \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) \right] \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0.$$

Cette égalité a lieu quel que soit le domaine du type considéré, c'est-à-dire limité par un tube de courant et par deux hypersurfaces engendrées par les lignes de chaleur. En vertu des hypothèses de continuité faites au début du paragraphe, l'élément d'intégration est continu. Il en résulte qu'il doit être identiquement nul. Nous en déduisons :

$$\nabla_\alpha q^\alpha - \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) = 0.$$

L'égalité précédente est vérifiée en tout point du domaine D_4 , il en résulte que l'on a encore la formule intégrale (10.3) pour tout domaine B_4 d'un type quelconque pris dans D_4 .

Si nous supposons maintenant que le vecteur courant de chaleur est donné par l'hypothèse de FOURIER, à l'aide du champ de température θ , il suffit de supposer que θ est de classe $(C^2, C^4 \text{ par morceaux})$ pour que le résultat précédent soit vrai.

Nous énonçons donc comme conséquence du postulat de continuité de la chaleur le théorème :

THÉOREME. - *Soit un domaine D_4 de l'espace-temps, occupé par un fluide thermodynamique conducteur. Pourvu que θ soit une fonction de classe $(C^2, C^4 \text{ par morceaux})$, et que les quantités u^α , ρ , κ , soient continues ainsi que leurs dérivées, alors le vecteur courant de chaleur q^α du fluide satisfait en chaque point du domaine D_4 , à l'équation :*

$$(10.4) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho.$$

et pour tout volume à quatre dimensions B_4 , pris dans D_4 , à l'égalité intégrale :

$$\iiint_{B_4} \left(c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \right) \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_{\partial B_4} q^\alpha d\omega_\alpha$$

où ∂B_4 désigne le bord de B_4 .

C'est l'égalité (10.5) qui traduit finalement le postulat de la continuité de la chaleur. L'équation aux dérivées partielles (10.4) que nous appellerons *équation de conduction thermique*, généralise une équation classique de FOURIER.

III. - Le tenseur d'impulsion-énergie et les équations du fluide thermodynamique relativiste.

11. Le tenseur d'impulsion-énergie du schéma fluide thermodynamique.

Considérons un domaine D_4 de l'espace-temps occupé par un milieu fluide thermodynamique tel qu'il a été défini dans les sections précédentes.

Nous nous proposons d'établir les équations du fluide thermodynamique. Or, nous connaissons les raisons qui ont conduit au système des équations d'EINSTEIN :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ ne dépend que de la structure de variété riemannienne de l'espace-temps. Il est conservatif, c'est-à-dire qu'il satisfait aux quatre conditions $\nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = 0$. Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ satisfait alors aussi aux quatre conditions :

$$(11.1) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

Comme il est de signification purement physique, il doit donner la description de la matière et de son mouvement. Nous postulons donc que les conditions de conservation sont l'expression des équations de mouvement du fluide thermodynamique.

Notre problème consiste à choisir le tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$. Il doit décrire au mieux les propriétés physiques du milieu. Et les grandeurs qui figurent dans ce tenseur seront les éléments du modèle plus ou moins simplifié, du concept approprié au problème traité, par lequel nous remplaçons la matière réelle.

Les traits reconnus expérimentalement comme les plus importants doivent évidemment être introduits et placés par ordre d'importance, dans notre mode de description. Les éléments de cette description sont ceux que la mécanique et la thermodynamique appliquent aux théories de l'hydrodynamique et de l'élasticité. Il est donc indiqué de faire figurer dans l'expression du tenseur d'énergie du fluide thermodynamique :

1. - un terme principal de beaucoup le plus important qui sera le tenseur d'énergie de la matière et de l'énergie pondérable.

2. - les pressions propres.

3. - les échanges thermiques consistant, au sein du milieu, en échanges par conduction.

4. - le champ électromagnétique.

Nous serons ainsi conduits à un schéma simple représenté par le tenseur d'impulsion-énergie suivant :

$$(11.2) \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \pi^{\alpha\beta} - Q^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}$$

où les termes successifs sont ceux qui ont été énoncés.

Le schéma sera dit schéma « *fluide thermodynamique pur* » ou simplement « *schéma thermodynamique* », si le terme dû au champ électromagnétique est négligé. C'est un tel schéma que nous nous proposons d'étudier.

Nous rapportons d'abord le fluide au voisinage d'un point x de D_4 , au repère propre en ce point : dans ce repère la matière est au repos au point envisagé. Le fluide y est caractérisé par une densité propre ρ , le tenseur des pressions propres $\pi^{i'k'}$ et le vecteur courant de chaleur $q_{i'}$.

12. Expression des composantes du tenseur d'énergie.

Si nous adoptons le tenseur d'expression générale

$$(12.1) \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \pi^{\alpha\beta} - Q^{\alpha\beta}$$

pour tenseur d'impulsion-énergie d'un schéma thermodynamique, les raisons qui viennent d'être exposées, nous conduisent à admettre que le tenseur d'impulsion-énergie doit avoir dans le repère propre, comme valeurs des composantes, les valeurs suivantes :

$$(12.2) \quad T^{0'0'} = \rho \quad T^{0'i'} = T^{i'0'} = -q^{i'} \quad T^{i'k'} = -\pi^{i'k'}.$$

Ce sont ces valeurs qui ont été adoptées dans notre théorie.

Elles sont justifiées par les conséquences.

Pour avoir l'expression invariante générale des composantes du tenseur d'énergie $T^{\alpha\beta}$, il suffit de faire un changement de repère.

Rapportons donc l'espace-temps, au voisinage du point considéré, au repère naturel, associé à un système de coordonnées curvilignes locales quelconque x^α . La matrice de passage d'un repère à l'autre est $(A_{\alpha'}^\lambda)$.

Nous passons des composantes $T^{\lambda'\mu'}$ du tenseur d'énergie dans le repère propre $(\vec{u}, \vec{V}^{(i)})$ à ses composantes contravariantes générales, par les formules de transformation

$$T^{\alpha\beta} = T^{\lambda'\mu'} A_{\lambda'}^\alpha A_{\mu'}^\beta.$$

En développant les calculs, nous avons

$$(12.3) \quad T^{\alpha\beta} = T^{0'0'} A_{0'}^\alpha A_{0'}^\beta + T^{i'k'} A_{i'}^\alpha A_{k'}^\beta + T^{0'i'} A_{0'}^\alpha A_{i'}^\beta + T^{i'0'} A_{i'}^\alpha A_{0'}^\beta.$$

Nous avons à y substituer les valeurs de $T^{\lambda'\mu'}$ données par les formules (12.2) et les valeurs de $A_{\lambda'}^\alpha$, en fonction des composantes des vecteurs du repère propre (cf. formules (8.3) § 8). Nous obtenons :

$$(12.4) \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \sum_{i', k'} \pi^{i'k'} V^{(i)\alpha} V^{(k)\beta} - \sum_{i'} q^{i'} u^\alpha V^{(i)\beta} - \sum_{i'} q^{i'} V^{(i)\alpha} u^\beta.$$

Nous poserons

$$(12.5) \quad \begin{aligned} \pi^{\alpha\beta} &= \sum_{i', k'} \pi^{i'k'} V^{(i)\alpha} V^{(k)\beta} \\ q^\alpha &= \sum_{i'} q^{i'} V^{(i)\alpha} \\ Q^{\alpha\beta} &= u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha. \end{aligned}$$

Dans le cas de l'hypothèse de FOURIER concernant la conduction de chaleur, nous pouvons vérifier que le vecteur q^α qui figure dans le tenseur d'énergie $T^{\alpha\beta}$, a bien l'expression relativiste établie au § 8. En effet, si nous admettons dans le repère propre

$$q_{i'} = -\kappa \partial_{i'} \theta$$

nous avons $q^{i'} = -q_{i'} = \kappa \partial_{i'} \theta$. Après le changement de repère, nous obtenons :

$$\sum_{i'} q^{i'} V^{(i')\alpha} = \sum_{i'} \kappa \partial_{i'} \theta V^{(i')\alpha} = \sum_{i'} \kappa \partial_\rho \theta A_{i'}^\rho V^{(i')\alpha}.$$

Comme $A_{i'}^\rho = V^{(i')\rho}$, nous avons :

$$q^\alpha = \sum_{i'} q^{i'} V^{(i')\alpha} = \kappa \partial_\rho \theta \sum_{i'} V^{(i')\rho} V^{(i')\alpha} = -\kappa \partial_\rho \theta (g^{\rho\alpha} - u^\rho u^\alpha).$$

Dans le cas général, le raisonnement que nous avons fait, nous conduit à adopter pour le schéma fluide-thermodynamique, l'expression générale suivante du tenseur d'impulsion-énergie :

$$(12.6) \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \pi^{\alpha\beta} - (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha).$$

La partie $Q^{\alpha\beta} = u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha$ correspond aux échanges thermiques par conductibilité dans le milieu.

Dans le repère propre :

$$\pi^{\lambda'\mu'} u_{\lambda'} = 0$$

$$u_{\lambda'} q^{\lambda'} = 0.$$

Les quantités $\pi^{\lambda'\mu'}$, $q^{\lambda'}$, $u_{\lambda'}$ sont des tenseurs et vecteurs ; il en résulte que dans un repère arbitraire on a encore :

$$(12.7) \quad \pi^{\alpha\beta} u_\alpha = 0$$

$$u_\alpha q^\alpha = 0$$

On peut vérifier ce résultat sur les formules (12.5).

13. Les équations de mouvement pour un schéma thermodynamique.

Considérons un schéma fluide thermodynamique où la distribution énergétique dans l'espace-temps associé, est représentée par le tenseur :

$$(13.1) \quad T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \pi^{\alpha\beta} - (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha).$$

Les équations de mouvement du fluide thermodynamique considéré, sont fournies par les conditions de conservation (cf. § 11) :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

appliquées à la forme (13.1) de son tenseur d'impulsion-énergie.

Nous avons, en prenant la dérivée covariante de $T^{\alpha\beta}$

$$(13.2) \quad \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + u^\beta \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) = 0.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est unitaire et orienté dans le temps :

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1.$$

En différentiant, on en déduit :

$$u_\beta \nabla_\alpha u^\beta = 0.$$

D'autre part, le vecteur courant de chaleur est orthogonal au vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$:

$$u_\beta q^\beta = 0.$$

Par multiplication contractée de (13.2) par u_β , il vient, en tenant compte des relations précédentes :

$$(13.3) \quad \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) - u_\beta \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha q^\alpha + q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\rho = 0.$$

Nous portons ensuite la valeur de $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha)$ tirée de cette équation, dans (13.2). Nous obtenons l'équation :

$$\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta + u^\beta (u_\rho \nabla_\alpha \pi^{\alpha\rho} + \nabla_\alpha q^\alpha - q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\rho) - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) = 0$$

que nous pouvons écrire :

$$(13.4) \quad \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\rho} (g_\rho^\beta - u_\rho u^\beta) - \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) + u^\beta (\nabla_\alpha q^\alpha - q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\rho) = 0.$$

Nous mettrons finalement les équations (13.3) et (13.4) sous la forme :

$$(13.5) \quad \nabla_\alpha(\rho u^\alpha) - u_\beta \nabla_\alpha \pi^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha q^\alpha - q^\beta u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta$$

$$(13.6) \quad \rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \nabla_\alpha \pi^{\alpha\rho} (g_\rho^\beta - u_\rho u^\beta) = \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) - u^\beta (\nabla_\alpha q^\alpha - q^\rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\rho).$$

L'équation (13.5) joue le rôle d'une équation de continuité pour le milieu. L'énergie d'origine calorifique y figure effectivement. Nous verrons au chapitre suivant, qu'elle est lourde de signification thermodynamique.

D'autre part, les lignes de courant du schéma considéré sont définies comme lignes tangentes au vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, c'est-à-dire les trajectoires du champ de vecteur $\vec{u}$. Les équations (13.6) où l'on posera :

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

constituent un système différentiel qui déterminera les lignes de courant du schéma.

Il convient d'ajouter aux équations précédentes, les relations supplémentaires qui définissent le vecteur courant de chaleur q^α

$$(13.7) \quad q^\alpha = -\chi \partial_\rho \theta (g^{\rho\alpha} - u^\rho u^\alpha)$$

$$(13.8) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho.$$

Elles détermineront les lignes de chaleur et le champ de température du schéma.

14. Cas d'un fluide parfait thermodynamique.

Un fluide est dit parfait si la résultante des forces superficielles $\vec{T} dS$, agissant sur un élément de surface orientée dS , est normale à cet élément. Dans ce cas, la quadrique des pressions, définie dans la repère propre par la forme quadratique de coefficients $\pi_{i'k'}$, est une sphère.

Le tenseur des pressions dans le repère propre a pour expression :

$$(14.1) \quad \pi_{i'k'} = p \delta_{i'k'}$$

où p est la pression scalaire du fluide au point considéré.

Les formules de transformation du § 12 conduisent à l'expression invariante générale dans l'espace-temps V_4 :

$$\pi^{\alpha\beta} = \sum_{i'k'} p \delta_{i'k'} V^{(i')\alpha} V^{(k')\beta} = p \sum_{i'} - V^{(i')\alpha} V^{(i')\beta}$$

d'où

$$(14.2) \quad \pi^{\alpha\beta} = p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta).$$

Nous donnerons à l'expression du tenseur d'impulsion-énergie du schéma fluide parfait thermodynamique, la forme suivante :

$$(14.3) \quad T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta} - (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha).$$

Les équations de mouvement pour un schéma fluide parfait thermodynamique, prennent la forme :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha[(\rho + p)u^\alpha] - u^\alpha \partial_\alpha p &= \nabla_\alpha q^\alpha - q^\beta u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta \\ (\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \partial_\alpha p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) &= \nabla_\alpha(u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) - u^\beta(\nabla_\alpha q^\alpha - q^\alpha u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta). \end{aligned}$$

Le vecteur courant de chaleur satisfait toujours aux relations de définition (13.7) et (13.8).

Les trois quantités ρ , p , θ sont liées par une relation appelée équation d'état du fluide parfait. Cette équation d'état sera introduite sous la forme

$$\rho = \varphi(p, \theta).$$

La fonction $\varphi(p, \theta)$ est demandée à l'expérience directe.

Nous étudierons au chapitre IV, comment avec ces équations se pose le problème de CAUCHY pour un fluide thermodynamique relativiste.

CHAPITRE III.

LES PRINCIPES GENERAUX D'UNE THERMODYNAMIQUE RELATIVISTE

I. - Forme différentielle des principes de thermodynamique classique pour un fluide en mouvement.

15. Evolution des caractéristiques d'un fluide en mouvement.

Considérons un milieu fluide en mouvement dans un domaine D de l'espace. Et proposons-nous d'étudier son évolution dans l'espace et le temps.

Pour cela, nous rapportons l'espace à un système de coordonnées curvilignes quelconques x^1, x^2, x^3 , en le douant de la métrique définie positive

$$(15.1) \quad ds^2 = g_{ij}(x^k) dx^i dx^j.$$

Nous désignerons par t la variable temps. Et nous supposons que l'on a pu définir pour le fluide considéré, en chaque point $M(x^i)$ et à chaque instant t :

1. - une densité de matière μ .
2. - un vecteur vitesse $\vec{v}$.

Nous appellerons caractéristiques du milieu fluide, les quantités géométriques ou physiques qui peuvent servir à décrire son évolution. Telles sont la densité de matière μ , la vitesse $\vec{v}$, le tenseur des pressions π^{ik} , la température θ , les densités d'énergie, la densité d'entropie...

Il est clair que l'évolution du fluide peut être étudiée grâce à l'étude de ses caractéristiques.

Or, si nous considérons une caractéristique locale du milieu continu, pour l'étudier, il nous faut la rapporter au système des quatre variables (x^1, x^2, x^3, t) . Ces variables seront dites les *variables d'Euler*. Si c'est une caractéristique scalaire w , son évolution peut être décrite par sa dérivée par rapport au temps

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x^3} \frac{dx^3}{dt}.$$

En introduisant les composantes contravariantes de la vitesse $\vec{v}$

$$(15.2) \quad v^i = \frac{dx^i}{dt}$$

et la notation habituelle des dérivées partielles $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ nous pouvons écrire

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + v^i \partial_i w.$$

L'évolution d'une caractéristique scalaire peut ainsi être décrite par l'opérateur de dérivation totale par rapport au temps

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \partial_i.$$

Si la caractéristique considérée est une composante d'un vecteur ou d'un tenseur défini dans l'espace, il nous faudra remplacer le symbole de dérivation partielle ∂_i par celui de dérivation covariante ∇_i relative à la métrique $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ de l'espace.

En convenant que $\nabla_i w = \partial_i w$, si w est une fonction scalaire, nous pouvons dire que l'évolution d'une caractéristique quelconque du fluide peut être décrite par l'opérateur :

$$(15.3) \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \nabla_i.$$

Avec cette notation, il est facile de donner aux équations générales de la dynamique des milieux continus ⁽²⁾ la forme :

$$(15.4) \quad \frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla_i v^i = 0$$

$$(15.5) \quad \mu \frac{dv^i}{dt} - f^i + \nabla_k \pi^{ik} = 0.$$

La première équation est l'équation de continuité du milieu. Les trois équations suivantes sont les équations de mouvement. f^i sont les composantes de la résultante des forces de masse par unité de volume. π^{ik} représente le tenseur des pressions internes.

16. Variables de Lagrange.

Considérons dans le domaine D de l'espace, une région V_0 occupée par un volume quelconque de fluide à un instant $t = 0$ pris pour instant initial. Soit V la région occupée par le même volume de fluide à l'instant t .

Suivons un élément de fluide dans son mouvement.

A l'instant initial $t = 0$, il occupe la position (a^1, a^2, a^3) dans V_0 . A l'instant t , il occupe la position (x^1, x^2, x^3) dans V . Le mouvement de cet élément de fluide sera défini si nous connaissons à chaque instant t les trois fonctions :

$$(16.1) \quad \begin{aligned} x^1 &= x^1(a^1, a^2, a^3, t) \\ x^2 &= x^2(a^1, a^2, a^3, t) \\ x^3 &= x^3(a^1, a^2, a^3, t) \end{aligned}$$

des quatres variables a^1, a^2, a^3, t .

⁽²⁾ Voir LICHNEROWICZ, *Eléments de Calcul tensoriel*, chapitre IV, section III.

L'ensemble des quatre variables (a^1, a^2, a^3, t) sera dit les *variables de Lagrange*. Nous pouvons, à l'aide des formules (16.1) exprimer les valeurs des caractéristiques du fluide, en fonction des variables de LAGRANGE, et étudier leur évolution à l'aide de ces variables.

Les équations (16.1) définissent une transformation ponctuelle dans D . Nous supposons que les x^i sont des fonctions de classe C^2 , à jacobien non nul, des variables a^1, a^2, a^3, t . Le déterminant fonctionnel Δ de la transformation est alors une fonction continue des variables a^1, a^2, a^3, t . Comme les x^i coïncident avec les a^i , à l'instant initial $t \doteq 0$, il a à cet instant, la valeur $+1$: la valeur de Δ est donc strictement positive à tout instant.

Nous faisons des hypothèses analogues sur la transformation inverse de (16.1)

$$(16.2) \quad \begin{aligned} a^1 &= a^1(x^1, x^2, x^3, t) \\ a^2 &= a^2(x^1, x^2, x^3, t) \\ a^3 &= a^3(x^1, x^2, x^3, t). \end{aligned}$$

DÉFINITIONS. — Les hypothèses de continuité sur les x^i et les a^i entraînent plusieurs conséquences.

Considérons dans la région V_0 occupée par un volume de fluide à l'instant initial, des éléments formant une ligne L_0 , définie par les expressions de a^1, a^2, a^3 en fonctions continues d'un paramètre λ . Le mêmes éléments à l'instant t se trouveront sur la ligne continue L définie par les équations (16.1) où l'on remplace a^1, a^2, a^3 par leurs expressions en fonction de λ .

Nous appelons cette ligne d'éléments, suivis ainsi dans le mouvement du fluide, une *ligne fluide*.

De même si l'on considère dans la région V_0 des éléments formant une surface Σ_0 définie par les expressions de a^1, a^2, a^3 en fonction de deux paramètres, les mêmes éléments à l'instant t se trouveront sur la surface Σ définie par les équations (16.1) où l'on remplace a^1, a^2, a^3 par leurs expressions en fonction de ces deux paramètres. Les éléments considérés forment dans le mouvement ce que nous appelons une *surface fluide*.

Si la surface Σ_0 est fermée, la surface Σ est aussi fermée. Les éléments de fluide se trouvant à l'instant initial à l'intérieur de la surface fermée Σ_0 , ne peuvent pas traverser la surface Σ . Se déplaçant avec continuité, ils restent constamment à l'intérieur de cette surface : ils forment ce que nous appelons un *volume fluide*.

Ces considérations nous seront fort utiles dans la suite.

17. - Lemme.

ENONCÉ. - Considérons dans le domaine D de l'espace, occupé par un fluide en mouvement, l'intégrale :

$$(17.1) \quad J = \iiint_V \mu \Phi dV$$

étendu à un volume fluide V enfermé dans une surface fluide fermée Σ , où μ est la densité du fluide au point $x^i \in D$, Φ une fonction scalaire définie au même point x^i , et dV l'élément de volume entourant ce point.

Si μ et Φ sont des fonctions continues des variables x^i , t , et admettent des dérivées partielles du 1er ordre continues dans le domaine D , alors pour tout volume fluide V intérieur au domaine D , on a l'égalité :

$$(17.2) \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \mu \Phi dV = \iiint_V \mu \frac{d\Phi}{dt} dV.$$

DÉMONSTRATION. - Dans ce qui suit, l'indice 0 affecté à une quantité, indique que cette quantité doit être prise avec sa valeur à l'instant initial $t=0$, tandis que la même quantité écrite sans indice, est prise avec sa valeur à l'instant t .

Soit V_0 le volume fluide à l'instant $t=0$.

L'hypothèse de continuité pour le milieu fluide, se traduit par l'égalité :

$$\iiint_V \mu dV = \iiint_{V_0} \mu_0 dV_0.$$

Si nous effectuons le changement de variables (16.1) pour la première intégrale, elle devient $\iiint_{V_0} \mu \Delta dV_0$. L'égalité précédente conduit à

$$\iiint_{V_0} (\mu \Delta - \mu_0) dV_0 = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu pour tout volume V_0 ; en vertu des hypothèses de continuité, nous en déduisons :

$$(17.3) \quad \mu \Delta - \mu_0 = 0$$

ce qui est une des formes de l'équation de continuité.

Ceci étant rappelé, appliquons la transformation (16.1) à l'intégrale J . Elle devient :

$$J = \iiint_V \mu \Phi dv = \iiint_{V_0} \mu \Phi \Delta dV_0.$$

D'après (17.3), $\mu \Delta = \mu_0$, nous avons :

$$J = \iiint_{V_0} \mu_0 \Phi dV_0.$$

L'espace et le temps forment un continuum, D est un continu.

Les fonctions μ et Φ , continues dans D , sont uniformément continues par rapport à α^i et t . D'autre part elles ont des dérivées continues dans D , par hypothèse. Nous pouvons alors différencier la fonction $J(t)$ sous le signe d'intégration :

$$\frac{dJ}{dt} = \iiint_{V_0} \mu_0 \frac{d\Phi}{dt} dV_0.$$

A cette intégrale, nous appliquons la transformation (16.2) qui est la transformation inverse de (16.1). La théorie du changement de variables dans l'intégration donne :

$$\iiint_{V_0} \mu_0 \frac{d\Phi}{dt} dV_0 = \iiint_V \frac{\mu_0}{\Delta} \frac{d\Phi}{dt} dV.$$

En vertu de (17.3), $\frac{\mu_0}{\Delta} = \mu$. Nous en déduisons la formule du lemme :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mu \Phi dV = \iiint_V \mu \frac{d\Phi}{dt} dV.$$

18. - Enoncés des principes de la thermodynamique appliquée à un milieu fluide.

En thermodynamique, on considère un ensemble de corps ou système, qui subit des transformations. A chaque instant, le système est dans un certain état qui est défini par les valeurs numériques d'un certain nombre de variables. Souvent, on considère ce qui s'est produit lorsque le système a passé d'un certain état initial à un certain état final. Le plus souvent, ces deux états sont des états d'équilibre. Les états intermédiaires ne sont pas des états d'équilibre. Très exceptionnellement, ces états intermédiaires peuvent être tous infiniment voisins des états d'équilibre. On dit alors que la transformation s'effectue d'une manière réversible.

Etant donnée une transformation subie par un système, il y a lieu d'examiner non seulement ce qui s'est passé à l'intérieur du système, mais aussi les conséquences de cette transformation sur ce qui est extérieur au système. En somme, on partage l'univers en deux parties : l'une est le système dont on étudie les transformations, l'autre est tout ce qui l'entoure.

Soit maintenant un volume fluide V qui évolue à l'intérieur du domaine D de l'espace occupé par un fluide en mouvement.

En vertu de l'hypothèse de continuité, il n'échange que du travail et de la chaleur avec le reste du fluide. On peut le considérer comme un système au sens de la thermodynamique générale.

Supposons que le volume fluide V évolue d'un état à un état voisin correspondant aux instants t et $t + dt$. Si U désigne son énergie totale, le premier principe dit que

$$(18.1) \quad dU = Q_e - \mathcal{C}_e$$

où Q_e et $\mathcal{C}_e$ sont respectivement la quantité de chaleur et la quantité de travail que le volume fluide V échange avec le reste du fluide.

L'énergie totale U est définie comme la somme de l'énergie cinétique et d'une énergie appelée énergie interne. Si $\frac{1}{2}\mu V^2$ et $\mu\varepsilon$ désignent la densité d'énergie cinétique et la densité d'énergie interne, U a pour valeur :

$$(18.2) \quad U = \iiint_V \frac{1}{2}\mu V^2 dV + \iiint_V \mu\varepsilon dV$$

ε est en général une fonction des variables d'état interne du fluide. Elle est supposée continûment différentiable.

Le volume fluide V est limité par la surface fluide Σ . A travers chaque élément $d\Sigma$ de la surface Σ , il y a échange de chaleur. Nous pouvons dire qu'associé à chaque élément $d\Sigma$, le reste du fluide constitue autant de sources de chaleur vis-à-vis du système constitué par V . L'évolution de V peut être caractérisé par le second principe.

Si nous considérons deux états voisins du volume fluide V correspondant aux instants t et $t + dt$, le second principe postule qu'il existe une fonction d'état S appelée entropie de V , telle que :

$$(18.3) \quad \frac{dS}{dt} \geq \iint_{\Sigma} \frac{q^i d\sigma_i}{\theta}$$

$d\sigma_i$ désigne les composantes du vecteur représentant l'élément d'aire $d\Sigma$ de Σ , θ la température au centre de $d\Sigma$. q^i est le vecteur courant de chaleur : $\frac{q^i d\sigma_i}{\theta}$ est donc la chaleur échangée sous la température θ entre V et la source fictive correspondante.

L'égalité est atteinte par une transformation réversible faisant passer le volume fluide V de l'état t à l'état $t + dt$.

19. Forme différentielle du premier principe.

Nous considérons un volume fluide V limité par une surface fermée régulière Σ , de façon que le théorème de GREEN s'applique. La normale de Σ sera orientée vers l'extérieur.

Nous supposerons dans la suite que les diverses quantités introduites sont continues ainsi que leurs dérivées.

Les échanges de chaleur se font par conduction, les échanges par convection n'ont pas lieu grâce au choix du volume V . Soit q^i le vecteur courant de chaleur. Aux infiniment petits d'ordre supérieur près, nous avons :

$$Q_e = dt \iint_{\Sigma} q^i d\sigma_i$$

$$\mathcal{C}_e = - dt \left(\iiint_V f^i v_i dV - \iint_{\Sigma} v_i \pi^{ik} d\sigma_k \right).$$

D'autre part de (18.2), nous tirons :

$$dU = dt \left(\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} \mu v^2 dV + \frac{d}{dt} \iiint_V \mu \varepsilon dV \right).$$

En substituant ces quantités dans (18.1), et tenant compte du lemme (17.2), nous arrivons à la relation suivante qui est vraie à chaque instant t :

$$\iiint_V \mu v_i \frac{dv^i}{dt} dV + \iiint_V \mu \frac{d\varepsilon}{dt} dV = \iint_{\Sigma} q^i d\sigma_i + \iiint_V f^i v_i dV - \iint_{\Sigma} v_i \pi^{ik} d\sigma_k.$$

Arrangeons les termes de la manière suivante :

$$(19.1) \quad \iiint_V \mu \frac{d\varepsilon}{dt} dV = \iint_{\Sigma} q^i d\sigma_i - \iiint_V \mu v_i \frac{dv^i}{dt} dV + \iiint_V f^i v_i dV - \iint_{\Sigma} v_i \pi^{ik} d\sigma_k.$$

Nous transformons la dernière intégrale par la formule de GREEN en intégrale de volume. Puis nous réunissons les trois derniers termes en une seule intégrale, soit :

$$\iiint_V \left[-\mu v_i \frac{dv^i}{dt} + f^i v_i - \nabla_k (v_i \pi^{ik}) \right] dV.$$

En vertu des équations de mouvement du fluide [§ 15, éq. (15.5)]

$$\mu \frac{dv^i}{dt} - f^i + \nabla_k \pi^{ik} = 0$$

nous avons :

$$-\mu v_i \frac{dv^i}{dt} + f^i v_i - \nabla_k (v_i \pi^{ik}) = v_i \nabla_k \pi^{ik} - \nabla_k (v_i \pi^{ik}) = -\pi^{ik} \nabla_k v_i$$

π^{ik} est un tenseur symétrique, nous pouvons introduire la quantité

$$\frac{1}{2} \pi^{ik} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) = \pi^{ik} \nabla_k v_i.$$

La relation (19.1) se met alors sous la forme :

$$(19.2) \quad \iiint_V \mu \frac{d\varepsilon}{dt} dV = \iint_{\Sigma} q^i d\sigma_i - \iiint_V \frac{1}{2} \pi^{ik} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) dV.$$

C'est l'expression intégrale du principe de conservation de l'énergie pour un volume fluide V en mouvement.

Nous transformons l'intégrale de surface en intégrale de volume et nous écrivons la relation obtenue sous la forme :

$$(19.3) \quad \iiint_V \left[\mu \frac{d\varepsilon}{dt} - \nabla_i q^i + \frac{1}{2} \pi^{ik} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) \right] dV = 0.$$

L'égalité précédente est vraie pour tout volume fluide du type considéré. En vertu des hypothèses de continuité, l'élément différentiel est identiquement nul.

$$(19.4) \quad \mu \frac{d\varepsilon}{dt} - \nabla_i q^i + \frac{1}{2} \pi^{ik} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) = 0.$$

Réciproquement si cette égalité a lieu en tout point du fluide, dans le domaine D , l'égalité intégrale (18.3) est vraie quel que soit le volume fluide V considéré, limité par une surface fermée quelconque.

Nous pouvons énoncer le théorème.

THÉORÈME. — *Si les diverses caractéristiques du fluide en mouvement sont définies comme des fonctions continues ainsi que leurs dérivées par rapport aux variables x^i , t , alors en tout point du domaine D occupé par le fluide, on a l'égalité*

$$(19.5) \quad \mu \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla_i q^i - \frac{1}{2} \pi^{ik} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)$$

et pour tout volume fluide V , on a l'égalité

$$(19.6) \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \mu \varepsilon dV = \iint_{\Sigma} q^i d\sigma_i - \iiint_V \frac{1}{2} \pi^{ik} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) dV.$$

Dans le cas d'un fluide parfait, $\pi^{ik} = pg^{ik}$:

$$\frac{1}{2} \pi^{ik} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) = p \nabla_i v^i.$$

En introduisant le volume spécifique $\omega = \frac{1}{\mu}$ et tenant compte de l'équation de continuité (15.4), on tire la formule remarquable

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = Q - p \frac{d\omega}{dt}$$

où $Q = \omega \nabla_i q^i$.

20. Forme différentielle du second principe.

L'entropie est une fonction additive de volume.

$$S(V_1 + V_2) = S(V_1) + S(V_2).$$

Pour un milieu continu, nous supposons qu'elle est définie par une densité d'entropie σ en chaque point du milieu, σ étant une fonction continûment différentiable. Chaque élément de masse dm du milieu possède alors l'entropie :

$$\sigma dm = \mu \sigma dV.$$

L'entropie d'un volume fluide V sera

$$(20.1) \quad S = \iiint_V \mu \sigma dV.$$

σ est une fonction des variables qui définissent l'état du milieu au point considéré. C'est donc une fonction de x^i , t soit directement, soit par l'intermédiaire de certaines caractéristiques du milieu.

DÉFINITION. - Il entre dans l'expression du second principe le vecteur de composantes $\frac{q^i}{\theta}$, qu'il est utile de distinguer du vecteur courant de chaleur q^i . On sait en effet que la notion de transformations réversibles et le second principe conduisent à une notion importante, celle des quantités de chaleur produites par des sources à des températures différentes.

Nous donnerons un nom au vecteur $\frac{q^i}{\theta}$ où θ est la température thermodynamique. Nous l'appellerons *vecteur chaleur entropique* et poserons :

$$(20.2) \quad \vec{C} = \frac{\vec{q}}{\theta}.$$

Dans la suite, nous supposerons que les diverses caractéristiques du fluide considéré, sont des fonctions continues, admettant des dérivées continues, par rapport aux variables d'EULER x^i , t ou aux variables de LAGRANGE a^i , t .

En portant la valeur (20.1) de S dans (18.3), nous obtenons la relation suivante qui est vraie à chaque instant t :

$$(20.3) \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \mu \sigma dV \geq \iint_{\Sigma} \frac{q^i}{\theta} d\sigma_i.$$

Transformons l'intégrale de surface en intégrale de volume et faisons usage du lemme (17.2). Nous obtenons l'inégalité

$$(20.4) \quad \iiint_V \left[\mu \frac{d\sigma}{dt} - \nabla_i \left(\frac{q^i}{\theta} \right) \right] dV \geq 0.$$

L'inégalité précédente a lieu à tout instant et pour tout volume fluide V . En vertu des hypothèses de continuité, nous en déduisons que l'élément différentiel satisfait nécessairement à l'inégalité de même sens :

$$(20.5) \quad \mu \frac{d\sigma}{dt} - \nabla_i \left(\frac{q^i}{\theta} \right) \geq 0.$$

Cette inégalité est vraie en tout point du domaine D et à tout instant, il en résulte que pour tout volume fluide V nous avons l'inégalité intégrale de même sens (20.4).

Nous énonçons le théorème.

THÉOREME. — *Si les diverses caractéristiques d'un fluide en mouvement sont définies comme des fonctions continues ainsi que leurs dérivées par rapport aux variables x^i , t , alors dans les hypothèses du lemme (17.2), en tout point du domaine D occupé par ce fluide, on a l'inégalité :*

$$\mu \frac{d\sigma}{dt} \geq \nabla_i \left(\frac{q^i}{\theta} \right)$$

et pour tout volume fluide V limité par une surface régulière fermée Σ , on a l'inégalité

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \mu \sigma dV \geq \iint_{\Sigma} \frac{q^i}{\theta} d\sigma_i.$$

II. — L'extension relativiste des principes de la thermodynamique.

21. L'interprétation des équations du fluide thermodynamique relativiste.

Pour avoir une interprétation en termes de temps et d'espace, des équations relativistes du fluide thermodynamique (cf. § 13), nous allons prendre pour V_4 , l'espace-temps de la relativité restreinte. Nous le rapporterons à un système de coordonnées galiléennes réduites ($x^0 = ct$, x^i).

Considérons le fluide au voisinage d'un point P .

Introduisons un système d'axes galiléens orthogonaux T d'origine P . Par rapport à T , le point P du fluide est au repos. Nous avons, en fonction du vecteur d'espace $v^i = \frac{dx^i}{dt}$, les formules

$$(21.1) \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad u^i = \frac{v^i}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right).$$

Il en résulte qu'au point P , $u^0 = 1$, $u^i = 0$. Mais les dérivées de u^i ne sont pas nulles

$$(21.2) \quad \partial_\lambda u^0 = 0 \quad \partial_\lambda u^i = \frac{1}{c} \frac{\partial_\lambda v^i}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Nous nous proposons de mettre les équations du fluide thermodynamique sous une forme analogue à la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k p^k = \Phi^0$$

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} + \partial_k \pi^{ik} = \Phi^i$$

où p^i est le vecteur impulsion relativiste auquel toutes les formes d'énergie doivent apporter leur contribution. π^{ik} est le tenseur des pressions des forces superficielles, Φ^i les composantes de la résultante des forces de masse, Φ^0 la quatrième composante de la force d'univers, doit représenter un travail ⁽³⁾.

Ces préliminaires étant posés, il est plus simple de partir des conditions de conservation $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ imposées au tenseur d'impulsion-énergie

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta - \pi^{\alpha\beta} - (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha)$$

à savoir les quatre équations :

$$(21.4) \quad \partial_\alpha (\rho u^\alpha u^0) - \partial_\alpha \pi^{\alpha 0} - \partial_\alpha (u^\alpha q^0 + u^0 q^\alpha) = 0$$

$$(21.5) \quad \partial_\alpha (\rho u^\alpha u^i) - \partial_\alpha \pi^{\alpha i} - \partial_\alpha (u^\alpha q^i + u^i q^\alpha) = 0.$$

Nous interprétons ces équations en tenant compte des conditions

$$u_\alpha \pi^{\alpha\beta} = 0 \quad u_\alpha q^\alpha = 0.$$

Multiplions (21.4) par u_0

$$\partial_\alpha (\rho u^\alpha) - \partial_\alpha (u_0 \pi^{\alpha 0}) - u_0 \partial_\alpha (u^\alpha q^0 + u^0 q^\alpha) = 0.$$

Or $u_0 \pi^{\alpha 0} = -u_i \pi^{\alpha i}$, nous en déduisons :

$$\partial_0 (\rho u^0) - \partial_k (\rho u^k - q^k + u_i \pi^{ik}) = \partial_0 q^0 + u^0 \partial_0 (u_0 q^0).$$

Une transformation analogue appliquée à (21.5) donne si nous nous limitons aux infiniment petits d'ordre 1 en β

$$\partial_0 (\rho u^i - q^i + u_k \pi^{ik}) - \partial_k \pi^{ik} = \partial_k (u^k q^i + u^i q^k).$$

Ainsi, au point P_0 , les équations (21.4) et (21.5) peuvent s'écrire, aux infiniment petits d'ordre supérieur à 1 en β près :

$$(21.4') \quad \partial_0 (\rho u^0) + \partial_k (\rho u^k - q^k + \pi^{ik} v_i) = \partial_0 q^0 + u^0 \partial_0 (u_0 q^0)$$

$$(21.5') \quad \partial_0 (\rho u^i - q^i + u_k \pi^{ik}) - \partial_k \pi^{ik} = \partial_k (u^i q^k + u^k q^i).$$

On voit qu'il est possible d'interpréter le vecteur

$$(\rho u^i - q^i + u_k \pi^{ik})$$

⁽³⁾ Le lecteur peut trouver un exposé clair de la Théorie de la Relativité restreinte dans les *Eléments de Calcul tensoriel* de LICHNEROWICZ [17].

comme un vecteur impulsion p^i . Il est plus délicat d'interpréter les seconds membres des équations précédentes. Mais du point de vue théorique, en P_0 nous avons

$$\partial_k(u^i q^k + u^k q^i) = q^i \partial_k u^k + q^k \partial_k u^i.$$

Cette quantité prend les dimensions d'une force, si on considère q^i comme une impulsion. La quantité précédente représente, si j'ose dire, une force d'origine thermodynamique.

Quant au second membre de (21.4'), on a d'abord

$$\begin{aligned}\partial_0 q^0 &= \partial_0 q_0 = -\kappa \partial_0 [\partial_0 \theta - (u^\lambda \partial_\lambda \theta) u_0] = \kappa \partial_i \theta u^0 \partial_0 u^i \\ \partial_0 q^0 &= -q_i u^0 \partial_0 u^i.\end{aligned}$$

Puis de $u_\alpha q^\alpha = 0$, on déduit que

$$u^0 \partial_0 (u_0 q^0) = -u^0 \partial_0 (u_i q^i) = -q^i u^0 \partial_0 u^i$$

$\partial_0 q^0$ et $u^0 \partial_0 (u_0 q^0)$ ont les dimensions d'un travail. Il représente, dans le même ordre d'idées, un travail d'origine thermodynamique.

Si nous utilisons la variable temps ordinaire t , il faut l'identifier au facteur c près, avec l'arc de ligne de courant en P_0 . Les équations (21.4') et (21.5') s'écriront alors avec des grandeurs exprimées en unités CGS :

$$(21.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} + \partial_k \left(\frac{\rho v^k - \frac{1}{c^2} q^k \sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{c^2} v_i \pi^{ik}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = -\frac{2}{c^2} q^i \frac{\partial}{\partial t} \frac{v_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(21.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^i - \frac{1}{c^2} q^i \sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{c^2} v_k \pi^{ik}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) - \frac{1}{c^2} \partial_k \pi^{ik} = \frac{1}{c^2} \partial_k \left(\frac{v^i q^k + v^k q^i}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

où v_i sont les composantes covariantes du vecteur vitesse d'espace $\vec{v}$ dans la métrique $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$.

Les équations (21.6) et (21.7) apportent des corrections relativistes aux équations classiques de la dynamique des milieux continus. Ces corrections sont de l'ordre de $\frac{1}{c^2}$. On conçoit la difficulté qu'éprouve l'expérience à s'en rendre compte.

22. L'équation de continuité relativiste et les principes de conservation classique.

Nous allons revenir un instant aux équations classiques du fluide, sous la forme qui a été introduite au cours de la section précédente. Cependant, du point de vue théorique, nous pouvons supposer que la force f^i dérive d'un tenseur symétrique, soit $f^i = \nabla_k w^{ik}$. Nous faisons donc entrer f^i dans

le tenseur général des pressions. Et nous considérons les équations classiques sous la forme :

$$(22.1) \quad \mu \frac{dv^i}{dt} + \nabla_k \pi^{ik} = 0$$

$$(22.2) \quad \frac{d\mu}{dt} + \nabla_i v^i = 0$$

$$(22.3) \quad \mu \frac{d\varepsilon}{dt} - \nabla_i Q^i + \pi^{ik} \nabla_i v_k = 0.$$

Multiplions (22.1) par $\frac{1}{c^2} v_i$ en sommant par rapport à l'indice i ; (22.2) par $\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right)$ et (22.3) par $\frac{1}{c^2}$: nous avons :

$$(22.4) \quad \frac{1}{c^2} \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{1}{c^2} v_i \nabla_k \pi^{ik} = 0$$

$$(22.5) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{c^2} \mu \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \nabla_i v^i = 0$$

$$(22.6) \quad \frac{1}{c^2} \mu \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{c^2} \nabla_i Q^i + \frac{1}{c^2} \pi^{ik} \nabla_i v_k = 0.$$

En ajoutant membre à membre les équations (22.2) (22.4) (22.5) et (22.6), nous obtenons l'égalité

$$\frac{d}{dt} \left[\mu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \right] + \mu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \nabla_i v^i - \frac{1}{c^2} \nabla_k Q^k + \frac{1}{c^2} \nabla_k (v_i \pi^{ik}) = 0$$

que nous écrivons sous la forme

$$(22.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \right] + \nabla_k \left[\mu \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\varepsilon}{c^2} \right) v^k - \frac{1}{c^2} Q^k + \frac{1}{c^2} v_i \pi^{ik} \right] = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation (21.6) du paragraphe précédent, on voit que l'équation (22.7) est une approximation classique de l'équation de continuité relativiste, puisque dans cette dernière ρ doit représenter la densité de matière et d'énergie réunie et que l'énergie cinétique provient du facteur $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ de ρ .

Du point de vue classique, on a formulé les deux principes de conservation de la matière et de l'énergie. La conservation de l'énergie se traduit par la relation

$$dU = Q_e - \mathcal{C}_e.$$

Et à côté de la distinction entre matière et énergie, on a introduit une seconde distinction importante entre l'énergie d'origine mécanique $\mathcal{E}_e$ et l'énergie d'origine calorifique Q_e , suivant leurs modes de production.

La théorie de la relativité n'impose plus la distinction nécessaire entre la matière et l'énergie. Et, à partir des considérations précédentes, nous voyons que les lois de conservation classiques se trouvent implicitement contenues dans les équations d'EINSTEIN

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

Ces lois s'expriment à travers les identités de conservation imposées au tenseur d'impulsion-énergie $T^{\alpha\beta}$. Nous sommes nécessairement conduits à prendre l'équation

$$u_\beta \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

comme l'équivalent relativiste des principes de conservation.

Cette équation n'est autre que l'équation de continuité relativiste. Elle appelle deux remarques :

1. - la distinction entre chaleur et travail, comme modes de production d'énergie, est conservée en relativité. Cette distinction se traduit par la nature géométrique différente du tenseur thermodynamique $Q^{\alpha\beta} = (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha)$, et du tenseur de la matière pure $\rho u^\alpha u^\beta$.

2. - le choix précédent satisfait aux exigences d'interprétation locale de la physique. Il nous suffit de poser :

$$\rho = \mu(1 + \varepsilon)$$

et d'interpréter μ comme la densité de matière locale. Celle-ci doit vérifier l'équation :

$$\nabla_\alpha (\mu u^\alpha) = 0.$$

23. La forme entropie.

Nous venons de faire remarquer que la distinction entre l'énergie-chaleur et l'énergie-travail est conservée en relativité. Nous concevons donc l'utilité de la formulation d'une thermodynamique relativiste. Or les lois de conservation ne sont qu'un corollaire des principes de la théorie de la relativité. Par contre la notion d'entropie nous oblige à une réflexion nouvelle. Elle doit jouer un rôle fondamental, en ce sens qu'elle déterminera tout le caractère de la thermodynamique relativiste.

Avant de procéder à la formulation de l'extension relativiste du second principe, nous allons introduire une définition invariante de l'entropie.

Soit un domaine D_4 de l'espace-temps, occupé par un milieu thermodynamique. Nous considérons des éléments de fluide et nous suivons leur variation dans l'espace-temps comme au § 9. Nous rapportons d'abord chaque élément de fluide au repère propre associé. Puis, par un changement de

coordonnées, nous en déduisons l'expression invariante générale des formules étudiées.

Choisissons dans D_4 des coordonnées telles que les lignes où la variable $x^{0'}$ varie seule, soient les lignes de courant. Et considérons une hypersurface définie localement par l'équation $x^{0'} = \text{const.}$, soit

$$x^{0'} = 0$$

qui définit dans D_4 un domaine à trois dimensions D_3 .

Chaque point de D_3 sera caractérisé par ses coordonnées x'' . L'élément de fluide au point $(x'') \in D_3$, est caractérisé par sa masse m , son volume ordinaire $\omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}$. Si ρ est la densité propre du fluide au point considéré, cet élément de fluide possède une entropie propre

$$\sigma m = \rho \sigma \omega^{1'} \wedge \omega^{2'} \wedge \omega^{3'}$$

ou σ est la densité propre d'entropie. C'est une fonction scalaire des caractéristiques du fluide.

Nous avons vu au § 20, comment on considère la variation de l'entropie dans le temps. Cette variation est rapportée au temps propre. Or, en relativité, le temps propre subit une variation relative à la coordonnée $x^{0'}$ de sorte qu'en réalité nous considérons dans le repère propre la variation de la quantité

$$\rho \sigma u^{0'}.$$

Il se trouve ainsi introduit le vecteur qui a pour composante non nulle $\rho \sigma u^{0'}$ dans le repère propre. Nous sommes amenés à considérer le champ de vecteurs $\rho \sigma \vec{u}$ ainsi défini dans D_4 . Dans un repère naturel associé à un système de coordonnées locales quelconque, ce champ de vecteurs est défini par ses composantes contravariantes

$$\rho \sigma u^\alpha.$$

Le vecteur $\rho \sigma \vec{u}$ admet le tenseur polaire d'ordre 3 dont les composantes sont données par :

$$(23.1) \quad (\rho \sigma)_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^* = \eta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \rho \sigma u^{\alpha_0}$$

où $\eta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ est le tenseur complètement antisymétrique associé à la forme élément de volume. Si $\varepsilon_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$ désigne l'indicateur de KRONECKER, on a

$$(23.2) \quad \eta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}.$$

Nous pouvons faire correspondre au champ de vecteurs $\rho \sigma \vec{u}$ d'une manière invariante, la forme différentielle extérieure d'ordre 3 :

$$(23.3) \quad \Omega = \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3} (\rho \sigma)_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^* dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3} = \frac{1}{3!} \eta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \rho \sigma u^{\alpha_0} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3}.$$

Nous introduisons les définitions suivantes.

DÉFINITIONS. - La forme différentielle Ω d'ordre 3 définie par la formule (23.3) sera appelée *forme entropie* attachée à l'élément de fluide au point (x^α) .

$$\Omega = \frac{1}{3!} \eta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \rho \sigma u^{\alpha_0} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3}.$$

Soit un domaine à trois dimensions B_3 pris dans le domaine D_3 comme il a été défini plus haut.

On appellera entropie du milieu considéré, dans le domaine à trois dimensions B_3 , l'intégrale de la forme entropie Ω sur ce domaine.

$$(23.4) \quad \iiint_{B_3} \Omega = \iiint_{B_3} \frac{1}{3!} \eta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \rho \sigma u^{\alpha_0} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3}.$$

24. L'extension relativiste du second principe de la thermodynamique.

Dans la suite des raisonnements, nous supposons que les diverses quantités introduites sont des fonctions continues et à dérivées continues dans le domaine considéré de l'espace-temps.

Soit donc le domaine D_4 de l'espace-temps, occupé par un milieu thermodynamique. Nous considérons dans ce domaine, un tube de courant T_3 et des sections B_3 de ce tube, du type qui a été défini dans le paragraphe précédent. Nous obtenons ainsi un domaine spatio-temporel B_4 .

Chaque section B_3 définit un domaine à trois dimensions auquel est attachée l'entropie

$$S = \iiint_{B_3} \Omega = \iiint_{B_3} \frac{1}{3!} \eta_{\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \rho \sigma u^{\alpha_0} dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2} \wedge dx^{\alpha_3}.$$

Lorsque la section B_3 varie dans le tube de courant T_3 , son entropie varie également. Nous appellerons variation de l'entropie S , quand la section B_3 se déplace d'une position $B_3^{(1)}$ à une position $B_3^{(2)}$, la différence :

$$(24.1) \quad S_2 - S_1 = \iiint_{B_3^{(2)}} \Omega - \iiint_{B_3^{(1)}} \Omega.$$

Nous pouvons expliciter cette formule.

On a en effet

$$\iiint_{T_3} \Omega = 0$$

et par suite

$$S_2 - S_1 = \iiint_{\partial B_4} \Omega$$

où ∂B_4 est le bord de B_4 . En appliquant la formule de STOKES il vient

$$(24.2) \quad S_2 - S_1 = \iiint_{B_4} D\Omega$$

où $D\Omega$ est la différentielle extérieure de Ω et où l'intégration est étendue au domaine à quatre dimensions B_4 limité par le tube de courant T_3 et par les deux sections $B_3^{(1)} B_3^{(2)}$.

La formule (24.2) est invariante pour tout changement de coordonnées. En nous reportant à la définition de la forme Ω , nous avons :

$$D\Omega = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial(\rho \sigma u^\alpha \sqrt{|g|})}{\partial x^\alpha} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

La quantité $\sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial(\rho \sigma u^\alpha \sqrt{|g|})}{\partial x^\alpha}$ définit un tenseur complètement antisymétrique d'ordre 4. En introduisant son scalaire polaire

$$\frac{1}{V|g|} \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial(\rho \sigma u^\alpha \sqrt{|g|})}{\partial x^\alpha} = \nabla_\alpha(\rho \sigma u^\alpha)$$

nous obtenons

$$(24.3) \quad S_2 - S_1 = \iiint_{B_4} \nabla_\alpha(\rho \sigma u^\alpha \sqrt{|g|}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

L'intégrale du second membre est étendue au domaine B_4 .

Par définition, nous dirons que sa valeur est la *variation d'entropie* attachée au domaine B_4 .

Nous avons ainsi défini l'entropie du milieu dans un domaine à trois dimensions B_3 , la variation d'entropie attachée à un domaine à quatre dimensions B_4 .

Nous introduisons le vecteur $\vec{C}$ qui a pour composantes dans le repère propre,

$$C^0 = 0 \quad C^\nu = \frac{q^\nu}{\theta}.$$

Dans un repère naturel quelconque, $\vec{C}$ aura pour composantes

$$C^\alpha = \frac{q^\alpha}{\theta}$$

où q^α désigne le vecteur courant de chaleur.

Le vecteur $\vec{C}$ ainsi défini sera encore appelé *vecteur chaleur entropique*.

Pour faire l'extension relativiste du second principe de la thermodynamique, nous allons considérer des domaines à quatre dimensions B_4 , limités par des tubes de courant T et par des sections B_3 que nous supposons maintenant *engendrées par des lignes de chaleur*. Nous postulons que la variation d'entropie attachée à tout domaine B_4 ainsi construit, est liée au flux du vecteur chaleur entropique $\vec{C}$ à travers le tube latéral T par l'inégalité

$$(24.4) \quad S_2 - S_1 \geq \iiint_T \frac{q^\alpha}{\theta} d\omega_\alpha$$

où $d\omega_\alpha$ désignera l'élément d'aire de la frontière ∂B_4 de B_4 .

Or

$$S_2 - S_1 = \iiint_{B_4} D\Omega$$

et

$$\iiint_T \frac{q^\alpha}{\theta} d\omega_\alpha = \iiint_{\partial B_4} \frac{q^\alpha}{\theta} d\omega_\alpha.$$

Des égalités (24.3), nous déduisons après avoir transformé l'intégrale de flux en intégrale de divergence :

$$(24.4') \quad \iiint_{B_4} \left[\nabla_\alpha (\rho \sigma u^\alpha) - \nabla_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{\theta} \right) \right] \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \geq 0.$$

Cette inégalité a lieu pour tout domaine B_4 du type défini précédemment. Nous allons montrer qu'en vertu des hypothèses de continuité, elle entraîne qu'en tout point du domaine D_4 :

$$(24.5) \quad \nabla_\alpha (\rho \sigma u^\alpha) - \nabla_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{\theta} \right) \geq 0.$$

En effet supposons que l'inégalité contraire a lieu en un point $P \in D_4$. Par raison de continuité, il existerait un voisinage $V(P)$ de ce point, pour lequel on aurait

$$(24.6) \quad \iiint_{V(P)} \left[\nabla_\alpha (\rho \sigma u^\alpha) - \nabla_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{\theta} \right) \right] \sqrt{|g|} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 < 0.$$

Or, dans ce voisinage, il est toujours possible de construire un tube de courant limité par deux sections engendrées par des lignes de chaleur et

contenant à son intérieur le point P . Ce domaine B_4' est du type B_4 : on a donc

$$\iiint\limits_{B_4'} \left[\nabla_\alpha(\rho\sigma u^\alpha) - \nabla_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{\theta} \right) \right] \sqrt{|g|} \, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \geq 0$$

comme conséquence du postulat (24.4'). L'inégalité (24.6) est donc impossible, sinon elle entraîne contradiction.

L'inégalité (24.5) est donc vraie en tout point du domaine D_4 . On en tire :

$$(24.7) \quad \nabla_\alpha(\rho\sigma u^\alpha) \geq \nabla_\alpha \left(\frac{q^\alpha}{\theta} \right)$$

et par intégration sur un domaine B à quatre dimensions, limité par une frontière régulière quelconque (et non plus nécessairement du type construit dans le postulat), on en déduit :

$$\iiint\limits_B D\Omega \geq \iiint\limits_{\partial B} \frac{q^\alpha}{\theta} d\omega_\alpha.$$

CHAPITRE IV.

LA STRUCTURE DES EQUATIONS DU CHAMP RELATIF A UN FLUIDE PARFAIT THERMODYNAMIQUE

I. - Le problème de Cauchy.

25. Position du problème.

Etant donné dans la variété espace-temps V_4 de la relativité générale, un domaine D occupé par un fluide parfait thermodynamique, on se propose d'étudier la structure des équations fondamentales du champ, au moyen de la solution du problème de CAUCHY.

Nous nous limitons au cas où la constante cosmologique est nulle (cf. § 5). Les modifications à faire subir à l'étude, lorsqu'il existe une constante cosmologique, sont aisées à obtenir.

A l'extérieur du domaine D , le champ de gravitation satisfait aux équations d'EINSTEIN sans second membre

$$(25.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 0.$$

A l'intérieur du domaine D , il est supposé satisfaire aux équations d'EINSTEIN

$$(25.2) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ correspond au fluide parfait thermodynamique :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha)$$

q_α est le vecteur courant de chaleur, lié au champ de température par les relations :

$$q_\alpha = -\kappa \partial_\rho \theta (g_\alpha^\rho - u^\rho u_\alpha)$$

$$\nabla_\alpha q^\alpha = c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho.$$

Nous supposons que l'équation d'état du fluide parfait est prise sous la forme

$$\rho = \varphi(p, \theta)$$

et nous poserons dans la suite

$$\partial^\lambda \theta = g^{\lambda\rho} \partial_\rho \theta \quad Z = u^\alpha \partial_\alpha \theta.$$

Les équations (25.2) peuvent s'écrire

$$(25.3) \quad R_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} S g_{\alpha\beta}$$

où S désigne l'invariant $g^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$ qui a pour valeur :

$$S = \chi(\rho - 3p).$$

Si on remarque que $R = -S$, on conclut que la courbure scalaire de l'espace-temps n'est pas affectée par le champ de température.

Notre étude purement locale sera d'abord relative aux équations d'EINSTEIN sans second membre. Ce problème a reçu une solution effective par G. DARMOIS et A. LICHNEROWICZ et dans un autre ordre d'idées par Mme FOURÈS qui suppose seulement les hypothèses de différentiabilité. Nous nous contentons donc d'en rappeler les résultats fondamentaux, qui nous seront utiles pour simplifier l'exposé de la solution des équations avec second membre (25.2).

26. La solution des équations sans second membre.

Les équations sans second membre (25.1) correspondent d'ailleurs au domaine de l'espace-temps non balayé par l'énergie. Ces équations s'écrivent indifféremment d'après (25.3), soit $S_{\alpha\beta} = 0$, soit

$$(26.1) \quad R_{\alpha\beta} = 0.$$

Le champ de gravitation étudié se trouve déterminé, par définition, par ses potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières. Le problème est donc le suivant :

Le problème extérieur. - Etant donnés, sur une hypersurface S , les potentiels de gravitation et leurs dérivées premières, déterminer en dehors de S , les valeurs des potentiels supposés satisfaire aux équations (26.1).

Nous supposons que l'hypersurface S est partout orientée dans l'espace et qu'elle est localement représentée par l'équation

$$(26.2) \quad x^0 = 0.$$

Nous appellerons indice d'une dérivée de $g_{\alpha\beta}$, le nombre de fois que l'indice 0 figure sous le symbole de dérivation.

La donnée sur S des potentiels $g_{\alpha\beta}$, détermine les valeurs sur S de leurs dérivées tangentes $\partial_i g_{\alpha\beta}$. Les données de CAUCHY sont alors constituées par les valeurs sur S des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières d'indice 1, soit $\partial_0 g_{\alpha\beta}$. Et nous nous proposons de déterminer les valeurs sur S , des dérivées d'indice supérieur à 1.

Les seules dérivées qui puissent être discontinues à la traversée de S , sont les dérivées d'indice 2: $\partial_{00}g_{\alpha\beta}$. Nous les mettons donc en évidence dans nos équations (26.1) qui s'écrivent plus explicitement:

$$(26.3) \quad R_{ij} \equiv -\frac{1}{2}g^{00}\partial_{00}g_{ij} + F_{ij}(d \cdot c) = 0$$

$$(26.4) \quad \begin{cases} R_{i0} \equiv -\frac{1}{2}g^{0j}\partial_{00}g_{ij} + \Phi_i(d \cdot c) = 0 \\ R_{00} \equiv -\frac{1}{2}g^{ij}\partial_{00}g_{ij} + \psi(d \cdot c) = 0 \end{cases}$$

où les $F_{ij}(d \cdot c)$, $\Phi_i(d \cdot c)$ et $\psi(d \cdot c)$ désignent des quantités calculables sur S , à partir des données de CAUCHY ($d \cdot c$) par opération algébrique ou par dérivation sur S .

Il est à noter qu'aucune des équations ne contient les dérivées $\partial_{00}g_{0\lambda}$. Ceci s'explique par le fait que la donnée sur S des potentiels et de leurs dérivées premières, laisse subsister la possibilité de changements de variables conservant S point par point et les valeurs sur S des données de CAUCHY. De tels changements de variables ne modifient pas les valeurs des $\partial_{00}g_{ij}$, mais permettent de donner à $\partial_{00}g_{\lambda 0}$ des valeurs arbitraires. Les discontinuités de $\partial_{00}g_{\lambda 0}$ apparaissent comme des singularités artificielles et sont dépourvues de signification physique.

A cette réserve près, les dérivées secondes des potentiels sont continues pour toute hypersurface S telle que $g^{00} \neq 0$. Il est clair que les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées successives des potentiels, dans le cas où les données de CAUCHY sont dérivables à un ordre supérieur.

Cette étude ne fait intervenir que les équations (26.3).

Ceci étant dit, il est facile d'établir les identités:

$$(26.5) \quad \begin{aligned} g^{0j}R_{ij} + g^{00}R_{i0} &\equiv R_i^0 = S_i^0 \\ \frac{1}{2}(g^{00}R_{00} - g^{ij}R_{ij}) &\equiv S_0^0, \end{aligned}$$

Le système des équations (26.3) et (26.4) équivaut alors au système

$$(26.6) \quad R_{ij} = 0$$

$$(26.7) \quad S_\alpha^0 = 0.$$

La forme des équations (26.3) et (26.4) montre que les premiers membres des relations (26.5), donc les S_α^0 , ne contiennent aucune dérivée d'indice 2 des potentiels. Les équations (26.7) fournissent alors quatre équations que doivent nécessairement vérifier les données de CAUCHY.

Les S_α^0 sont liées aux premiers membres des équations (26.6) par les conditions de conservation $\nabla_\alpha S_\beta^\alpha = 0$, soit

$$(26.8) \quad \nabla_0 S_\alpha^0 + \nabla_k S_\alpha^k = 0.$$

Or, pour une solution des équations (26.6), on a :

$$S_j^i = g^{i0} R_{0j} - \frac{1}{2} \delta_j^i (g^{00} R_{00} + 2g^{0k} R_{0k})$$

$$S_0^i = g^{i\lambda} R_{\lambda 0}$$

et aussi

$$S_i^0 = g^{00} R_{i0} \quad S_0^0 = \frac{1}{2} g^{00} R_{00}.$$

On en déduit que les équations (26.8) peuvent se mettre sous la forme

$$(26.9) \quad g^{00} \partial_0 S_\alpha^0 = A_\alpha^{i\lambda} \partial_i S_\lambda^0 + B_\alpha^\lambda S_\lambda^0$$

où les $A_\alpha^{i\lambda}$ et B_α^λ sont des fonctions continues.

Le système des quatre équations (26.9) est linéaire et homogène en S_α^0 . Comme $S_\alpha^0 = 0$ sur S , il n'admet d'autre solution que la solution nulle.

Il résulte ainsi des équations de conservation que, si une solution des équations (26.6) satisfait sur S aux équations (26.7), elle satisfait aussi en dehors de S à ces équations. On traduit ce fait en disant que le système des équations d'EINSTEIN est en involution.

Nous voyons d'après cette analyse, que le problème initial doit être partagé en deux problèmes distincts :

1. - *Problème I ou problème des conditions initiales.* Il consiste dans la recherche des données de CAUCHY satisfaisant sur S au système $S_\alpha^0 = 0$.

2. - *Problème II ou problème de l'évolution.* Il consiste dans l'intégration du système $R^{ij} = 0$, pour des données de CAUCHY satisfaisant aux conditions du premier problème.

27. Analyse des équations du problème intérieur.

A l'intérieur du domaine D de l'espace-temps, occupé par le fluide, la métrique ds^2 de l'espace-temps satisfait aux équations

$$(27.1) \quad S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

où

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha)$$

$$q_\alpha = -\kappa(\partial_\alpha \theta - Zu_\alpha)$$

$$(27.2) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho$$

$$(27.3) \quad \rho = \varphi(p, \theta).$$

A ces équations, il faut ajouter les conditions de conservation, ainsi que le caractère unitaire du vecteur vitesse d'univers u^α .

$$(27.4) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

$$(27.5) \quad g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1.$$

Ces conditions conduisent à l'équation de continuité et aux équations de mouvement :

$$(27.6) \quad \nabla_\alpha[(\rho + p)u^\alpha] - u^\alpha \partial_\alpha p = \nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho$$

$$(27.7) \quad (\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \partial_\alpha p(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) = \nabla_\alpha(u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) - u^\beta(\nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho).$$

Les coefficients calorifiques κ , c , l sont des fonctions connues

$$\kappa = \kappa(\rho, \theta)$$

$$(27.8) \quad c = c(\rho, \theta)$$

$$l = l(\rho, \theta).$$

L'exposé des équations montre qu'il y a deux problèmes qui se distinguent nettement :

1. - la détermination de la structure géométrique de l'espace-temps par les potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$;

2. - l'étude de l'évolution du schéma matériel, par la détermination des quantités ρ , p , θ , u^λ .

Nous supposons que l'hypersurface S est localement représentée par l'équation

$$x^0 = 0.$$

En ce qui concerne le premier problème, les considérations faites au § 26 précédent, s'appliquent à quelques modifications près. Il nous faut donner sur l'hypersurface S portant les conditions initiales, les potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières d'indice 1, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$. Et nous mettons en évidence les dérivées d'indice 2 des $g_{\alpha\beta}$ dans le premier membre des équations d'EINSTEIN prises sous la forme

$$(27.9) \quad R_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} S g_{\alpha\beta}$$

soit :

$$(27.9a) \quad R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + F_{ij}(dc) = S_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij}$$

$$(27.9b) \quad \begin{cases} R_{i0} \equiv \frac{1}{2} g^{j0} \partial_{00} g_{ij} + \Phi_i(d \cdot c) = S_{i0} - \frac{1}{2} S g_{i0} \\ R_{00} \equiv -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_{00} g_{ij} + \psi(d \cdot c) = S_{00} - \frac{1}{2} S g_{00}. \end{cases}$$

Moyennant les données initiales, si $g^{00} \neq 0$, les équations (27.9a) fournissent les valeurs sur S des dérivées d'indice 2 des potentiels $\partial_{00} g_{ij}$, si l'on connaît les valeurs des seconds membres (c'est-à-dire des quantités $\rho, p, \theta, \partial_\alpha \theta, u^\lambda$).

Ce calcul ne fait intervenir que le groupe des équations (28.9a), à l'exclusion des équations (27.9b). Or la donnée des $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_0 g_{\alpha\beta}$ sur S , définit entièrement les valeurs sur S des quatre quantités S_α^0 , comme on a vu au paragraphe précédent. Nous pouvons alors substituer aux équations (27.9b) les équations suivantes

$$S_\alpha^0 = \chi T_\alpha^0$$

qui fournissent le moyen de calculer les quantités p, ρ, u^λ , si nous connaissons θ et $\partial_\alpha \theta$.

Ceci étant dit, l'étude du schéma matériel exige la détermination du champ de température θ . Comme θ figure dans nos équations (27.2) (27.4) (27.5) par ses dérivées jusqu'à l'ordre 2, il nous faudra donner les valeurs sur S du champ de température θ et de sa dérivée d'indice 1: $\partial_0 \theta$, car les dérivées tangentes $\partial_i \theta$ et $\partial_{i0} \theta$ s'obtiennent par simple dérivation. La seule dérivée de θ qui puisse être discontinue à la traversée de S , est la dérivée d'indice 2: $\partial_{00} \theta$.

Cette dérivée $\partial_{00} \theta$ figure d'abord dans l'équation de conduction (27.2), puis dans les conditions de conservation (27.4), en l'espèce l'équation de continuité (27.6) et les équations de mouvement (27.7). Sa détermination est donc liée à celle des dérivées de ρ, p, u^λ .

L'analyse précédente nous montre que notre problème se pose sous la forme suivante :

Le problème intérieur. - Etant donnés sur une hypersurface S :

- a) le champ de gravitation par ses potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$,
- b) le champ de température par θ et $\partial_\lambda \theta$,

déterminer ces deux champs ($g_{\alpha\beta}, \theta$) au voisinage de l'hypersurface S .

Nous supposons, comme il a été dit dans la partie axiomatique, les hypothèses de différentiabilité suivantes :

$g_{\alpha\beta}$ de classe $(C^1, C^3 \text{ par morceaux})$.

θ de classe $(C^2, C^1 \text{ par morceaux})$.

Il nous suffit d'étudier la possibilité de calculer sur S les valeurs des érediffntes quantités introduites et de leurs dérivées successives.

28. Détermination de p , u^λ , $\partial_{00}g_{ij}$.

La détermination de p , u^λ , $\partial_{00}g_{ij}$, se fait à l'aide des équations d'EINSTEIN (27.1), de l'équation d'état (27.3), auxquelles il convient d'ajouter le caractère unitaire du vecteur vitesse u^λ . Or, nous avons vu que le système des équations d'EINSTEIN est équivalent à l'ensemble des deux systèmes (27.9a) et (27.10),

Nous écrivons donc les équations

$$(28.1) \quad R_{ij} \equiv -\frac{1}{2}g^{00}\partial_{00}g_{ij} + F_{ij}(dc) = \chi \left[(\rho + p)u_i u_j - \frac{1}{2}(\rho - p)g_{ij} - (u_i q_j + u_j q_i) \right]$$

$$(28.2) \quad S_\lambda^0 = \chi [(\rho + p)u^0 u_\lambda - p g_\lambda^0 - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0)]$$

$$(28.3) \quad \rho = \varphi(p, \theta)$$

$$(28.4) \quad g^{\lambda\mu}u_\lambda u_\mu = 1.$$

Supposant p provisoirement connu, nous nous proposons d'évaluer en fonction de p , les inconnues u^0 et $Z = u^\rho \partial_\rho \theta$. Pour cela, nous écrivons (28.2) sous la forme :

$$(28.2') \quad S_\lambda^0 + \chi p g_\lambda^0 = \chi [(\rho + p)u^0 u_\lambda - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0)].$$

Ces équations donnent, si $V^0 \neq 0$

$$u_\lambda = \frac{(S_\lambda^0 + \chi p g_\lambda^0) - \chi u^0 \partial_\lambda \theta}{\chi V^0}$$

où nous avons posé

$$(28.5) \quad V^0 = (\rho + p - \kappa Z)u^0 + \kappa(\partial^0 \theta - Z u^0).$$

Nous formons deux équations par multiplication contractée de (28.2') par $g^{\lambda 0}$ et $\partial^\lambda \theta$ respectivement.

$$\begin{aligned} S^{00} + \chi p g^{00} &= \chi [(\rho + p - 2\kappa Z)u^0 + 2\kappa \partial^0 \theta] u^0 \\ \partial^\lambda \theta (S_\lambda^0 + \chi p g_\lambda^0) &= \chi \{ (\rho + p - 2\kappa Z)u^0 + \kappa \partial^0 \theta \} Z + \kappa \Delta_\lambda \theta u^\lambda \}. \end{aligned}$$

En introduisant V^0 , nous donnons aux deux équations établies, la forme

$$(28.6) \quad \chi(V^0 + \kappa \partial^0 \theta)u^0 = \chi P^{00}(p) \equiv S^{00} + \chi p g^{00}$$

$$(28.7) \quad \chi(V^0 Z + \kappa \Delta_\lambda \theta u^\lambda) = \chi Q^0(p) \equiv (S^{0\lambda} + \chi p g^{0\lambda}) \partial_\lambda \theta$$

où $\Delta_\lambda \theta = g^{\lambda\mu} \partial_\lambda \theta \partial_\mu \theta$.

Les deux équations (28.6), (28.7) déterminent linéairement u^0 et Z à partir de V^0 ou d'une inconnue équivalente. Or, en exprimant à partir de (27.2') le caractère unitaire de u_λ il vient

$$\begin{aligned} \chi^2 g^{\lambda\mu} [(\rho + p)u^0 u_\lambda - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0)] [(\rho + p)u^0 u_\mu - (u^0 q_\mu + u_\mu q^0)] \\ = \chi^2 [R^0(p)]^2 \equiv g^{\lambda\mu} (S_\lambda^0 + \chi p g_\lambda^0) (S_\mu^0 + \chi p g_\mu^0). \end{aligned}$$

Le premier membre se calcule facilement. Il est égal à :

$$[(\rho + p)u^0 - q^0]^2 + (u^0)^2 g^{\lambda\mu} q_\lambda q_\mu.$$

Or, $q^0 = -\kappa(\partial^0\theta - Zu^0)$ et $g^{\lambda\mu} q_\lambda q_\mu$ est le carré du vecteur q_λ . Ce vecteur est la composante d'espace du vecteur $-\kappa \vec{\text{grad}} \theta$. La composante de temps de ce dernier est $-\kappa Zu_\lambda$. On en déduit par le théorème de PYTHAGORE :

$$g^{\lambda\mu} q_\lambda q_\mu = \kappa^2 (\Delta_1 \theta - Z^2).$$

Il vient alors l'équation

$$\chi^2 \{ [(\rho + p)u^0 + \kappa(\partial^0\theta - Zu^0)]^2 + \kappa^2 (\Delta_1 \theta - Z^2)(u^0)^2 \} = \chi^2 [R^0(p)]^2.$$

En introduisant V^0 , elle s'écrit :

$$(28.8) \quad (V^0)^2 + 2\kappa Z V^0 u^0 + \kappa^2 \Delta_1 \theta (u^0)^2 = [R^0(p)]^2.$$

Nous éliminons ensuite u^0 , Z du système des trois équations (28.6) (28.7) (28.8), ce qui conduit à l'équation

$$(V^0)^2 (V^0 + \kappa \partial^0 \theta)^2 - (R^0)^2 (V^0 + \kappa \partial^0 \theta)^2 + 2\kappa P^{00} Q^0 (V^0 + \kappa \partial^0 \theta) - \kappa^2 \Delta_1 \theta (P^{00})^2 = 0.$$

En substituant à V^0 , l'inconnue

$$(28.9) \quad W^0 = V^0 + \kappa \partial^0 \theta$$

nous obtenons finalement l'équation :

$$(28.10) \quad (W^0)^4 - 2\kappa \partial^0 \theta (W^0)^3 + [\kappa^2 (\partial^0 \theta)^2 - (R^0)^2] (W^0)^2 + 2\kappa P^{00} Q^0 (W^0) - \kappa^2 \Delta_1 \theta (P^{00})^2 = 0.$$

L'équation précédente définit $W^0(p)$. Nous en déduisons $V^0(p)$, puis p à l'aide des relations (28.3), (28.5) et (28.6).

En portant les valeurs ainsi calculées de p , u_λ dans les équations (28.1), nous déterminerons finalement les valeurs des dérivées d'indice 2 : $\partial_{00} g_{ij}$.

29. Détermination de $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_{00} \theta$.

La détermination des dérivées $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_{00} \theta$ s'effectue à l'aide de l'équation de conduction thermique (27.2) et des conditions de conservation imposées au tenseur d'impulsion-énergie. Si on tient compte du caractère unitaire de $\vec{u}$, ces conditions de conservation conduisent à l'équation de continuité et aux équations de mouvement. Il en résulte que nous disposons du système

$$(29.1) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho$$

$$(29.2) \quad \nabla_\alpha [(\rho + p)u^\alpha] - u^\alpha \partial_\alpha p = \nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho$$

$$(29.3) \quad (\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - \partial_\alpha p (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) = \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) - u^\beta (\nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho).$$

Introduisant encore Z comme inconnue auxiliaire, nous formons une équation supplémentaire par multiplication contractée de (29,3) par $\partial_\beta \theta$, soit :

$$(29.4) \quad (\rho + p)u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta \partial_\beta \theta - \partial_\alpha p (\partial^\alpha \theta - Zu^\alpha) = \partial_\beta \theta \nabla_\alpha (u^\alpha q^\beta + u^\beta q^\alpha) - Z(\nabla_\alpha q^\alpha - q_\rho u^\alpha \nabla_\alpha u^\rho).$$

La connaissance de p , u^λ , $\partial_0 \theta$ sur S calculées au paragraphe précédent, entraîne celle des dérivées tangentes $\partial_i p$, $\partial_i u^\lambda$, et $\partial_{i0} \theta$. En tenant compte de l'équation d'état $\rho = \rho(p, \theta)$ et mettant en évidence les inconnues, nous obtiendrons le système des équations :

$$(29.5) \quad \frac{l}{\rho} u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \partial_0 p + \kappa Z \partial_0 u^0 - \kappa g^{00} \partial_{00} \theta + \kappa u^0 \partial_0 Z = H_1(dc)$$

$$(29.6) \quad u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \partial_0 p + (\rho + p - \kappa Z) \partial_0 u^0 + \kappa [g^{00} + (u^0)^2] \partial_{00} \theta - 2\kappa u^0 \partial_0 Z = H_2(dc)$$

$$(29.7) \quad [g^{00} - (u^0)^2] \partial_0 p - (W^0 - \kappa Z u^0) \partial_0 u^0 - \kappa [g^{00} - (u^0)^2] u^0 \partial_{00} \theta = H_3(dc)$$

$$(29.8) \quad (\partial^0 \theta - Zu^0) \partial_0 p - \kappa (\Delta_i \theta - Z^2) \partial_0 u^0 + (\rho + p - \kappa Z) (u^0)^2 \partial_{00} \theta - V^0 \partial_0 Z = H_4(dc)$$

et les trois équations

$$(29.9) \quad (g^{0i} - u^0 u^i) \partial_0 p - \kappa (\partial^i \theta - Zu^i) \partial_0 u^0 - V^0 \partial_0 u^i - \kappa u^0 (g^{0i} - u^0 u^i) \partial_{00} \theta = K^i(dc)$$

où les H_z et K^i sont des expressions calculables sur S à partir des données de CAUCHY, par opérations algébriques ou par dérivation sur S .

Nous voyons que si $V^0 \neq 0$, les $\partial_0 u^i$ sont immédiatement connues quand les autres inconnues ont été évaluées.

Les quantités $\partial_0 p$, $\partial_0 u^0$, $\partial_{00} \theta$, $\partial_0 Z$ sont parfaitement déterminées par le système des quatre équations (29.5) (29.6) (29.7) et (29.8) qui sont linéaires par rapport aux inconnues, pourvu que le déterminant D du système soit différent de zéro.

Ainsi, si

$$V^0 \neq 0 \quad D \neq 0$$

on peut calculer les dérivées $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_{00} \theta$.

30. Caractère général de la solution du problème intérieur.

Les calculs des deux paragraphes précédents (§§ 28 et 29) montrent que si les données de CAUCHY ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$; θ , $\partial_0 \theta$) sont respectivement trois fois et deux fois continûment dérivables sur l'hypersurface S qui les porte, les équations (28.2) (28.3) fournissent les valeurs de p , u^λ sur S , les équations (28.1) fournissent les valeurs de $\partial_{00} g_{ij}$ et les équations (29.1) (29.2) (29.3) fournissent les valeurs de $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_{00} \theta$.

Si l'hypersurface S satisfait aux trois hypothèses

$$(30.1) \quad g^{00} \neq 0 \quad V^0 \neq 0 \quad D^0 \neq 0$$

les diverses quantités $(p, u^\lambda, \partial_{00}g_{ij}, \partial_0p, \partial_0u^\lambda, \partial_{00}\theta)$ ont sur S des valeurs bien déterminées et ne peuvent pas être discontinues à la traversée de S .

Si les données de CAUCHY sont dérivables localement à un ordre supérieur, les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur sur S de ces quantités. Il suffit de dériver par rapport à x^0 , les équations (28.1) pour avoir les dérivées d'indice supérieur de g_{ij} , les équations (29.1) (29.2) et (29.3) pour avoir les dérivées d'indice supérieur de (p, u^λ, θ) . On remarque que cette détermination s'effectue alternativement entre les deux groupes. *Elle traduit en fait la séparation logique du champ de gravitation et du schéma matériel, en même temps que leur interaction.*

Ceci étant dit, si nous posons

$$(30.2) \quad Q_\beta^\alpha \equiv S_\beta^\alpha - \chi T_\beta^\alpha$$

les équations d'EINSTEIN qui s'étaient partagées en deux groupes, vont s'écrire :

$$(30.3) \quad Q_{ij} \equiv R_{ij} - \chi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \right) = 0$$

$$(30.4) \quad Q_\lambda^0 \equiv R_\lambda^0 - \chi \left(T_\lambda^0 - \frac{1}{2} T g_\lambda^0 \right) = 0.$$

Les tenseurs $S^{\alpha\beta}$ et $T^{\alpha\beta}$ sont conservatifs, il en résulte que le tenseur $Q^{\alpha\beta}$ est aussi conservatif :

$$(30.5) \quad \nabla_\alpha Q_\beta^\alpha = 0.$$

Nous allons montrer que les premiers membres des équations (30.3) et (30.4) sont liés par des relations provenant des conditions de conservation de Q_β^α .

En effet, si nous considérons une solution $(g_{\alpha\beta}, \theta; p, u^\lambda)$ du problème intérieur, un calcul donne :

$$Q_i^0 = g^{00} \left[R_{i0} - \chi \left(T_{i0} - \frac{1}{2} g_{0i} T \right) \right]$$

$$Q_0^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left[R_{00} - \chi \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \right].$$

Il en résulte que la quantité

$$R + \chi T = g^{\alpha\beta} \left[R_{\alpha\beta} - \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) \right]$$

s'exprime par une combinaison linéaire et homogène à coefficients continus des Q_α^0 . Par suite, il en est de même des composantes :

$$Q_\beta^i = g^{\alpha i} Q_{\alpha\beta} = g^{\alpha i} \left[R_{\alpha\beta} - \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) \right].$$

Il s'ensuit que les conditions de conservation (30.5) qui s'écrivent :

$$\nabla_\alpha Q_\beta^\alpha = \nabla_0 Q_\beta^0 + \nabla_i Q_\beta^i = 0$$

se réduisent, pour une solution des équations (30.3) à :

$$(30.6) \quad g^{00} \partial_0 Q_\beta^0 = A_\beta^{\alpha z} \partial_i Q_\alpha^0 + B_\beta^z Q_\alpha^0$$

où les $A_\beta^{\alpha z}$ et B_β^z sont des fonctions continues.

Le système des quatre équations (30.6) est linéaire et homogène en Q_β^0 . Comme $Q_\beta^0 = 0$ sur S , il n'admet d'autre solution en dehors de S que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si une solution du problème satisfait sur S aux équations (30.4), elle satisfait aussi en dehors de S , à ces équations.

L'étude précédente précise le caractère de la solution du problème intérieur. En effet, notre problème initial se trouve partagé en deux problèmes :

1. - *Problème I.* - Recherche des données de CAUCHY ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$; θ , $\partial_0 \theta$) rendant compatibles les équations

$$\begin{aligned} S_\lambda^0 &= \chi T_\lambda^0 \\ g^{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu &= 1 \end{aligned}$$

et détermination à l'aide de ces données, des quantités p , u_λ .

2. - *Problème II.* - Intégration, pour des données de CAUCHY ainsi choisies, du système des équations

$$\begin{aligned} R_{ij} &= S_{ij} - \chi T_{ij} \\ \nabla_\alpha q^\alpha &= c \rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho \\ \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Supposons un instant, ce qui est d'ailleurs contraire aux axiomes que nous avons posés aux chapitres I et II, que toutes les données du problème soient analytiques réelles. On peut alors établir, à l'aide du théorème de CAUCHY-KOWALESKA pour les équations aux dérivées partielles, qu'à un changement de coordonnées près, conservant point par point l'hypersurface S et les valeurs des données de CAUCHY sur S , le problème admet une solution analytique réelle et une seule. Mais en fait l'analyticité ne doit jouer aucun rôle ici. Ce résultat nous montre seulement la voie à suivre.

II. - Le problème de raccordement.

31. Généralités.

On se propose de représenter sur une variété espace-temps V_4 , un modèle comportant plusieurs domaines meublés par de la matière. Dans chacun de ces domaines meublés, la matière engendre un tube d'univers limité par une hypersurface S . A l'intérieur de S , la métrique de l'espace-temps doit satisfaire aux équations d'EINSTEIN du cas intérieur :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}.$$

A l'extérieur de tous les domaines meublés, elle doit vérifier les équations d'EINSTEIN du cas extérieur

$$S_{\alpha\beta} = 0.$$

Dans chacun de ces domaines, les potentiels $g_{\alpha\beta}$ relatifs à un système de coordonnées admissible, ainsi que leurs dérivées premières sont continues. Pour ce qui se passe à la traversée de S conformément aux axiomes généraux de la relativité générale (§ 1), nous devons imposer les conditions suivantes, dites conditions de raccordement de SCHWARZCHILD.

Les conditions de raccordement. - Pour tout point x de S , il existe un système de coordonnées admissibles dont le domaine contient x , tel que les potentiels relatifs à ce système et leurs dérivées premières soient continus à la traversée de S .

Ces conditions sont relatives aux potentiels de gravitation.

Etant donnée la structure des équations du schéma matériel, nous imposons également des conditions analogues au champ de température.

Nous supposons donc que les quantités

$$g_{\alpha\beta}, \partial_\lambda g_{\alpha\beta}, \theta, \partial_\lambda \theta$$

sont continues à la traversée des hypersurfaces de raccordement.

L'étude du problème de raccordement présente ici un caractère local. On peut prendre pour coordonnées admissibles, les coordonnées de GAUSS.

Etant donnée une hypersurface S de V_4 , les coordonnées de GAUSS relatives à S sont définies de la manière suivante. Supposons que l'hypersurface S soit définie localement par l'équation

$$x^0 = 0,$$

chaque point de S par ses coordonnées x'' . Les coordonnées (x') sont choisies de façon que les lignes sur lesquelles la variable x'' varie seule, les x' restant constantes, soient les géodésiques issues des points $x'' \in S$ et normalement à S .

Si $\vec{V}$ est le vecteur normé, tangent aux géodésiques, il existe localement une fonction φ telle que ⁽⁴⁾

$$V_\alpha = \partial_\alpha \varphi.$$

Au voisinage de S , la métrique de V_4 peut prendre alors la forme

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{ij}(x^\lambda)dx^i dx^j$$

où $x^0 = \varphi$ et $x^i = x^{i'}$.

$g_{00} = +1$ si S est orientée dans l'espace, et $g_{00} = -1$ si S est orientée dans le temps. Nous verrons que l'hypersurface de raccordement doit être orientée dans le temps.

32. Prolongement de l'intérieur de la matière vers l'extérieur.

Donnons nous, dans une région limitée à une hypersurface S , un ds^2 intérieur correspondant à un schéma fluide parfait thermodynamique. Et proposons-nous de rechercher à quelle condition il existe, de l'autre côté de S , un ds^2 extérieur se raccordant le long de S avec le ds^2 intérieur donné.

L'hypersurface S étant définie localement dans un système de coordonnées admissibles, par l'équation

$$x^0 = 0$$

nous supposons qu'il existe un ds^2 extérieur répondant à la question. Les S_λ^0 associées à ce ds^2 extérieur sont identiquement nulles. Or, à l'intérieur de S et sur S , les S_λ^0 ne dépendent que des potentiels $g_{\alpha\beta}$, de leurs dérivées premières et de leurs dérivées secondes d'indice 1. (cf. § 26). En vertu des conditions de raccordement, les quantités S_λ^0 associées au ds^2 intérieur doivent être nulles sur S .

Il faut donc que l'on ait sur S :

$$(32.1) \quad T_\lambda^0 = (\rho + p)u^0 u_\lambda - p g_\lambda^0 - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0) = 0.$$

D'autre part, le raccordement du champ d'un fluide parfait thermodynamique avec un champ extérieur doit s'effectuer le long d'une hypersurface S sur laquelle

$$\theta = \text{const} \quad \partial^0 \theta = 0.$$

Il en résulte que $q^\lambda = 0$ sur S .

De (32.1), nous tirons

$$(32.2) \quad (\rho + p)u^0 u_\lambda - p g_\lambda^0 = 0.$$

En exprimant le caractère unitaire de u_λ , on trouve $\rho u^0 = 0$. On en déduit $u^0 = 0$, puis $p = 0$.

Ainsi nous avons nécessairement sur S :

$$u^0 = 0 \quad p^0 = 0.$$

(4) A. LICHNEROWICZ, Cours du Collège de France, 1952-1953, chapitre III, [18].

Autrement dit, l'hypersurface de raccordement S est engendrée par les lignes de courant du schéma intérieur. La pression p s'annule sur S .

Réciproquement, supposons qu'il en soit ainsi sur S . Les quantités S_λ^0 associées au ds^2 intérieur sont nulles. L'hypersurface S engendrée par les lignes de courant, est partout orientée dans le temps. Un ds^2 extérieur se raccordant avec le ds^2 intérieur donné, est alors une solution du problème de CAUCHY extérieur, relatif à S et aux données précédentes. Nous savons que ce problème a localement une solution bien déterminée (cf. § 26).

Nous pouvons donc énoncer.

THÉOREME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le problème du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur admette une solution locale — et cette solution est unique — est que :*

1. — *l'hypersurface S soit engendrée par les lignes de courant du champ intérieur,*

2. — *la pression p s'annule sur S .*

33. Prolongement de l'extérieur vers l'intérieur.

Un ds^2 extérieur limité à une hypersurface S étant donné, nous nous proposons de rechercher s'il existe un ds^2 intérieur correspondant au schéma fluide parfait thermodynamique, qui se raccorde avec le ds^2 extérieur le long de S . Il est entendu que sur S :

$$\theta = \text{const} \quad \partial^0 \theta = 0.$$

Il en résulte que $q_\lambda = 0$. Comme sur S , nous devons avoir $S_\lambda^0 = 0$, nous déduisons que :

$$(\rho + p)u^0 u_\lambda - p g_\lambda^0 - (u^0 q_\lambda + u_\lambda q^0) = 0$$

et $u^0 = 0$, $p = 0$ ce qui entraîne

$$V^0 \equiv (\rho + p - \kappa Z)u^0 + \kappa(\partial^0 \theta - Z u^0) = 0$$

et nous sommes dans l'un des cas exceptionnels où le problème intérieur n'est pas correctement posé : ce problème de CAUCHY intérieur est impossible, ou bien il admet plusieurs solutions.

On peut interpréter cette circonstance en disant qu'un champ extérieur donné peut ne pas être compatible avec une distribution effective d'énergie matérialisée sous la forme de fluide parfait thermodynamique, sinon peut l'être avec plusieurs telles distributions.

Cette conclusion permet d'étendre certains résultats connus en théorie de gravitation concernant la régularité des ds^2 .

En particulier, si on considère dans un champ de gravitation extérieur donné, un tube d'univers infiniment mince représentant une très petite masse d'épreuve, les interactions internes sont négligeables ; et le champ intérieur du tube peut être considéré comme un schéma matière pure. Le principe des géodésiques doit être conservé.

III. - Étude des variétés exceptionnelles.

34. Généralités sur les variétés exceptionnelles.

Au cours de l'étude du problème de CAUCHY relatif à un fluide parfait thermodynamique, nous avons vu que le problème n'est pas déterminé, si l'hypersurface S d'équation locale $x^0 = 0$, qui porte les données de CAUCHY est telle que :

$$g^{00} = 0, \quad V^0 = 0 \quad \text{ou} \quad D = 0.$$

De telles variétés S seront dites les variétés exceptionnelles du problème de CAUCHY.

Que se passe-t-il à la traversée de ces variétés ?

Si $g^{00} = 0$, les dérivées d'indice 2 des potentiels de gravitation $\partial_{00}g_{ij}$ sont discontinues à la traversée de S . Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations d'EINSTEIN correspondant aux mêmes données de CAUCHY sur S . La variété S est tangente en chacun de ses points, au cône élémentaire Γ_x associé à ce point (cf. § 2). Or les cônes Γ_x sont les cônes caractéristiques du système des équations d'EINSTEIN aussi bien intérieur qu'extérieur.

Les variétés telles que $g^{00} = 0$ sont les variétés caractéristiques. Elles seront appelées V_3^c .

Les variétés exceptionnelles $V^0 = 0$ correspondent au problème de la détermination algébrique des quantités p , u^λ , ρ . A la traversée de ces variétés, la pression, la densité et le vecteur vitesse unitaire du fluide peuvent présenter des discontinuités.

A la traversée des variétés telles que $D = 0$, ce sont les dérivées des caractéristiques du fluide : $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_0 q^\lambda$ qui peuvent présenter des discontinuités.

Ces variétés constituent donc l'extension relativiste des surfaces d'ondes considérées comme surfaces de discontinuités au sens d'HUGONIOT-RIEMANN.

Les variétés $V^0 = 0$ seront appelées les variétés exceptionnelles d'ordre 0 ou les V_3^0 . Les variétés $D = 0$ seront appelées les variétés exceptionnelles du 1er ordre ou les V_3^H .

Dans un système de coordonnées arbitraire, l'hypersurface S aura pour équation :

$$f(x^\lambda) = 0.$$

Pour que la surface de discontinuité qu'elle représente, ait une signification physique, il faut faire l'hypothèse qu'elle soit orientée dans le temps, ou à la limite, tangente aux cônes élémentaires.

Cette hypothèse se traduit par l'inégalité

$$\Delta_\lambda f \equiv g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f \leq 0.$$

Nous verrons qu'elle satisfait aux exigences relativistes de la théorie.

35. Les variétés caractéristiques V_3^c .

Si S est représentée localement par l'équation $f(x^\alpha) = 0$, les variétés caractéristiques sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles du 1er ordre :

$$(35.1) \quad \Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Les variétés caractéristiques V_3^c des équations d'EINSTEIN peuvent être engendrées au moyen des multiplicités caractéristiques de l'équation (35.1). Chaque multiplicité caractéristique en est constituée par l'ensemble d'une courbe caractéristique L_0 et d'éléments de contact attachés à chaque point de cette courbe et tangentes à cette courbe.

On donne aux courbes caractéristiques L_0 de (35.1), le nom de bicaractéristiques des équations d'EINSTEIN. Nous allons les déterminer.

Désignons par $2H(x^\lambda, \partial_\mu f)$ le premier membre de l'équation (35.1) et posons : $y_\alpha = \partial_\alpha f$. Il vient :

$$(35.2) \quad \Delta_1 f \equiv 2H(x^\lambda, \partial_\mu f) = g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

Relativement aux variables x^α , f , y_β , les bandes caractéristiques de (35.1) sont solutions du système différentiel :

$$\frac{dx^0}{\partial H} = \dots = \frac{dx^3}{\partial H} = \frac{df}{2H} = -\frac{dy_0}{\partial H} = \dots = -\frac{dy_3}{\partial H} = du$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_0} = \dots = \frac{\partial H}{\partial y_3} = \frac{df}{2H} = -\frac{dy_0}{\partial H} = \dots = -\frac{dy_3}{\partial H} = du$$

où u désigne une variable auxiliaire. Elles satisfont donc au système différentiel :

$$(35.3) \quad \frac{dx^\alpha}{du} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} \quad \frac{dy_\beta}{du} = -\frac{\partial H}{\partial x^\beta}$$

et à l'intégrale première :

$$2H(x^\lambda, y_\mu) = C.$$

On reconnaît dans le système (35.3), le système des équations canoniques de HAMILTON relatif à la fonction hamiltonienne $H(x^\lambda, y_\mu)$.

En posant

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$$

on tire des équations (35.3)

$$\dot{x}^\alpha = g^{\alpha\beta} y_\beta \quad \text{ou} \quad y_\beta = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha.$$

Les solutions $x^\alpha(u)$ de (35.3) sont alors extrémales de la fonction lagrangienne L définie par

$$2L = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

puisque, par passage des variables $(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ aux variables (x^α, y_β) , on a entre H et L la relation

$$H = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L (= L).$$

Les solutions $x^\alpha(u)$ de (35.3) sont donc les extrémales satisfaisant à l'intégrale première :

$$2L = C$$

pour la valeur $C=0$ de la constante C .

Il en résulte que les bicaractéristiques des équations d'EINSTEIN sont les géodésiques de longueur nulle du ds^2 . Et les variétés caractéristiques V_3^c peuvent être engendrées par les bandes de V_4 définies par les géodésiques de longueur nulle L_0 , le 3-plan associé étant le plan tangent au cône élémentaire, le long de la tangente à L_0 .

En se reportant à la théorie de propagation par ondes telle qu'elle découle des travaux de HADAMARD, on voit que le champ de gravitation présente, en relativité le caractère d'un phénomène de propagation. Les variétés caractéristiques du champ jouent le rôle de surfaces d'onde gravifique et les bicaractéristiques L_0 , celui des rayons gravifiques ⁽⁵⁾.

36. Vitesse de propagation des surfaces de discontinuités.

Dans le langage de la théorie de propagation par ondes, les surfaces de discontinuités sont des surfaces d'ondes. La généralisation de l'hypothèse d'HUGONOT permet d'évaluer ce qu'on entend par vitesse de propagation.

Considérons en effet deux surfaces d'ondes voisines définies par les équations

$$\begin{aligned} \Omega_0 : & \quad f(x^\alpha) = 0 \\ \Omega_\varepsilon : & \quad f(x^\alpha) = \varepsilon. \end{aligned}$$

ε sera pris dans la suite comme infiniment petit principal :

Soit x un point de Ω_0 . La ligne de courant issue de x coupe la surface d'onde voisine Ω_ε en un point x' défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par

$$x' = x + \eta \vec{u}$$

où η est donné par la relation

$$(36.1) \quad \eta u^\lambda \partial_\lambda f = \varepsilon.$$

Soit $\vec{v}$ le vecteur unitaire normal en x à Ω_0 . Par hypothèse la surface Ω est orientée dans le temps. On a donc $(\vec{v})^2 = -1$. Le vecteur $\vec{v}$ a donc pour

⁽⁵⁾ G. DARMOIS [4] et A. LICHTNEROWICZ [18].

composantes

$$(36.2) \quad v_\lambda = \frac{\partial_\lambda f}{\sqrt{-g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f}}.$$

La trajectoire orthogonale aux surfaces d'onde voisines de Ω_0 , qui est issue de x , est tangente au vecteur $\vec{v}$. Elle coupe Ω_ε au point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par

$$x + \eta_1 \vec{v}$$

où η_1 est donné par la relation

$$(36.3) \quad \eta_1 v^\lambda \partial_\lambda f = \varepsilon.$$

Introduisons le vecteur

$$\vec{t} = \eta \vec{u} - \eta_1 \vec{v}.$$

Nous avons :

$$\vec{t} \cdot \vec{v} = \eta(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \eta_1(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \eta \vec{u} \cdot \vec{v} + \eta_1.$$

Or :

$$\eta_1 = \frac{-\varepsilon}{\sqrt{-g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f}} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{u^\lambda \partial_\lambda f}{\sqrt{-g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f}}.$$

En vertu de (36.1) et (36.3), il vient

$$\vec{t} \cdot \vec{v} = 0.$$

Le vecteur $\vec{t}$ est donc tangent à Ω_0 en x . Soit η_0 son module

$$\eta_0^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2(\vec{u})^2 + \eta_1^2(\vec{v})^2 - 2\eta\eta_1(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Il est facile de vérifier que $\eta \vec{u} \cdot \vec{v} = -\eta_1$. Il en résulte

$$\eta_0^2 = \eta_1^2 + \eta^2 \geq 0.$$

On en déduit que le vecteur $\vec{t}$ est orienté dans le temps.

Le vecteur $\eta \vec{u}$ se trouve ainsi décomposé en une somme de deux vecteurs, une composante orthogonale à la surface d'onde et orientée dans l'espace, l'autre composante tangente à la surface d'onde et orientée dans le temps. La vitesse de propagation de l'onde est définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit :

$$T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\eta_1|}{|\eta_0|}.$$

On en déduit le carré de cette vitesse qui est donné par la formule

$$T^2 = - \frac{(u^\lambda \partial_\lambda f)^2}{(g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu) \partial_\lambda f \partial_\mu f}.$$

On remarque au numérateur la grandeur de temps du vecteur $\vec{\text{grad}} f$ et au dénominateur sa grandeur d'espace.

L'hypothèse $\Delta_1 f \equiv g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f \leq 0$ entraîne l'inégalité $T^2 \leq 1$, ce qui est conforme aux exigences relativistes.

Dans le système de coordonnées locales où la surface d'onde est définie par $x^0 = \text{const}$, nous avons la formule :

$$T^2 = - \frac{(u^0)^2}{g^{00} - (u^0)^2} \quad \text{où} \quad g^{00} \leq 0.$$

37. Les variétés exceptionnelles du premier ordre V_3^H .

Elles se présentent dans l'étude du schéma thermodynamique. A la traversée de ces variétés V_3^H , se produisent des discontinuités du gradient de pression (ainsi que des quantités $\partial_0 \rho$, $\partial_0 u^\lambda$, $\partial_0 q^\lambda$). Elles constituent l'extension relativiste des fronts d'onde de l'hydrodynamique classique lorsqu'on tient compte des changements de température.

Les variétés exceptionnelles V_3^H peuvent alors généraliser la propagation d'une perturbation faible, compatible au sens d'HUGONIOU avec le mouvement initial du fluide thermodynamique. Elles donnent la solution du problème de la propagation des ondes acoustiques dans le fluide conducteur.

Nous effectuons les calculs dans le système de coordonnées locales où la variété exceptionnelle V_3^H a pour équation

$$x^0 = 0.$$

Elle est alors définie par la condition $D = 0$, qui s'écrit explicitement :

$$D \equiv \begin{vmatrix} \frac{l}{\rho} u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} & xZ & -xg^{00} & xu^0 \\ u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \rho + p - xZ & x[g^{00} + (u^0)^2] & -2xu^0 \\ g^{00} - (u^0)^2 & -(W^0 - xZu^0) & -x[g^{00} - (u^0)^2]u^0 & 0 \\ \partial^0 \theta - Zu^0 & -x(\Delta_1 \theta - Z^2) & (\rho + p - xZ)(u^0)^2 & -V^0 \end{vmatrix} = 0$$

Ajoutons les éléments de la deuxième ligne multipliés par u^0 à ceux de la troisième ligne; les éléments de la première ligne à ceux de la seconde ligne, puis les éléments de la quatrième colonne multipliés par u^0 à ceux de la troisième colonne. L'équation précédente devient :

$$(37.1) \quad \begin{vmatrix} \frac{l}{\rho} u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} & xZ & -x[g^{00} - (u^0)^2] & xu^0 \\ \left(1 + \frac{l}{\rho}\right) u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} & \rho + p & 0 & -xu^0 \\ g^{00} - (u^0)^2 + (u^0)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial p} & -2x(\partial^0 \theta - Zu^0) & 0 & -2x(u^0)^2 \\ \partial^0 \theta - Zu^0 & -x(\Delta_1 \theta - Z^2) & -x(\partial^0 \theta - Zu^0)u^0 & -(\rho + p - xZ)u^0 - x(\partial^0 \theta - Zu^0) \end{vmatrix} = 0.$$

Divisons par $\sqrt{g^{00} - (u^0)^2}$ les éléments de la première colonne, de la quatrième colonne et ceux de la troisième ligne; puis les éléments de la troisième colonne par $-\sqrt{g^{00} - (u^0)^2}$. Enfin, multiplions par κ les éléments de la quatrième ligne. Il se forme les quantités :

$$\frac{u^0}{\sqrt{g^{00} - (u^0)^2}} = T \quad \frac{\kappa(\partial^{0l}) - Zu^0}{\sqrt{g^{00} - (u^0)^2}} = \vec{q} \cdot \vec{n}$$

où T désigne la vitesse de propagation de la variété V_3^H et $\vec{n}$ le vecteur unitaire orienté dans l'espace, défini par la composante d'espace de la normale à V_3^H , c'est-à-dire la direction de propagation de l'onde.

Il vient ainsi l'équation :

$$(37.2) \quad \begin{vmatrix} \frac{l}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} T & \kappa Z & 1 & T \\ \left(1 + \frac{l}{\rho}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} T & \rho + p & 0 & -T \\ -1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p} T^2 & 2 \vec{q} \cdot \vec{n} & 0 & -2T^2 \\ \vec{q} \cdot \vec{n} & (\vec{q})^2 & -\vec{q} \cdot \vec{n} T & (\rho + p - \kappa Z)T - \vec{q} \cdot \vec{n} \end{vmatrix} = 0$$

où chaque terme prend aisément sa signification classique.

L'équation (37.2) est du quatrième degré en T .

Les racines doivent vérifier la condition $|T| \leq 1$.

On voit que la vitesse de propagation T dépend du champ de température par l'intermédiaire de $\vec{q}$ et Z . Or, pour une onde acoustique, où interviennent seulement le gradient de pression et l'accélération $\partial_0 u^\lambda$, les phénomènes thermiques sont négligeables : $\text{grad } \theta$ est petit. On peut se rendre compte de l'intérêt de cette étude en faisant une approximation.

Pour cela, nous développons le premier membre de l'équation (37.2) suivant $\partial_\lambda \theta$, pris comme infiniment petit principal. En nous limitant aux termes du premier ordre, nous aurons :

$$\begin{aligned} & -(\rho + p)(\rho + p - \kappa Z)T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} T^2 - 1 \right) \\ & + (\rho + p)(\vec{q} \cdot \vec{n}) \left\{ 2 \left(1 + \frac{l}{\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} T^2 - 2T^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} T^2 - 1 \right) - \frac{2l}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial p} T^4 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} T^2 - 1 \right) T^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

En simplifiant par $(\rho + p)$ et ordonnant les termes suivant les puissances de T , nous avons :

$$(37.3) \quad \begin{aligned} & (\vec{q} \cdot \vec{n}) \left(1 + \frac{2l}{\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} T^4 + (\rho + p - \kappa Z) \frac{\partial \varphi}{\partial p} T^3 + \vec{q} \cdot \vec{n} \left[1 - \left(3 + \frac{2l}{\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right] T^2 \\ & - (\rho + p - \kappa Z)T + \vec{q} \cdot \vec{n} = 0. \end{aligned}$$

Cette équation appelle plusieurs remarques :

a. - Si $\vec{q} = 0$, c'est-à-dire si la perturbation satisfait à la loi de détente adiabatique, une racine devient infinie, une deuxième racine tend vers 0, tandis que les deux autres racines sont données par l'équation :

$$(\rho + p - \kappa Z) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} T^2 - 1 \right) = 0$$

Elles ont pour valeur :

$$T = \pm \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces deux racines opposées donnent la vitesse de propagation de l'onde. On retrouve un résultat de l'hydrodynamique classique.

Dans une transformation adiabatique, on peut définir un fluide incompressible comme un fluide où les fronts d'onde se propagent avec la vitesse limite unité, ce qui conduit à l'équation d'état :

$$\rho - p = \text{const.}$$

b. - Si $\vec{q}$ est petit, ce qui est le cas des fluides réels (κ est de l'ordre de 10^{-4} en unités CGS), l'équation (37.3) montre qu'une racine est de l'ordre de $\frac{1}{\vec{q} \cdot \vec{n}}$, une racine de l'ordre de $\vec{q} \cdot \vec{n}$, les deux autres racines voisines de $\pm \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)^{-\frac{1}{2}}$, le terme correctif étant de l'ordre de $\vec{q} \cdot \vec{n}$.

Plus exactement :

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{1 + \frac{2l}{\rho}} \cdot \frac{\rho + p - \kappa Z}{\vec{q} \cdot \vec{n}} & T_2 &= \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\rho + p - \kappa Z} \\ T_3 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)^{-\frac{1}{2}} + \lambda & T_4 &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)^{-\frac{1}{2}} + \lambda' \end{aligned}$$

où λ, λ' sont petits.

En substituant dans (37.3), $T = \pm \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)^{-\frac{1}{2}} + \lambda$, nous aurons une équation du 4^e degré en λ . Mais, puisque λ et $\vec{q} \cdot \vec{n}$ sont petits, nous avons une approximation du 1^{er} ordre pour λ , en nous limitant aux termes du 1^{er} ordre en λ et en $(\vec{q} \cdot \vec{n})$

$$\begin{aligned} &\vec{q} \cdot \vec{n} \left(1 + \frac{2l}{\rho} \right) \frac{1}{\varphi'_p} + (\rho + p - \kappa Z) \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{\varphi'_p}} + 3\lambda \right) \\ &+ \vec{q} \cdot \vec{n} \left[\frac{1}{\varphi'_p} - \left(3 + \frac{2l}{\rho} \right) \right] - (\rho + p - \kappa Z) \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{\varphi'_p}} + \lambda \right) + \vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(\rho + p)\lambda - \vec{q} \cdot \vec{n} \left(1 - \frac{1}{\varphi_p}\right) \left(1 + \frac{l}{\rho}\right) = 0.$$

On en déduit

$$\lambda = + \left(1 - \frac{1}{\varphi_p}\right) \left(1 + \frac{l}{\rho}\right) \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{\rho + p}$$

et on note que $\lambda = \lambda'$.

La correction est très petite, puisqu'en unités CGS, il faut substituer à $\vec{q}$, le vecteur $\frac{\vec{q}}{c}$, c vitesse limite. Elle est donc imperceptible dans les mesures expérimentales.

C'est dans ce sens que nous avons une preuve de la précision des formules classiques proposées depuis LAPLACE.

38. Les variétés exceptionnelles d'ordre zéro V_3^0 .

Ce sont des variétés à la traversée desquelles se produisent les discontinuités de ρ , p , u^λ , q^λ . Nous allons voir qu'elles généralisent ce qu'on entend ordinairement par ondes de choc.

Pour les étudier, il nous faut revenir aux équations initiales utilisées pour la détermination de p , u^λ (cf. § 28) que nous prenons sous la forme :

$$(38.1) \quad S^{0\lambda} = \chi T^{0\lambda}.$$

Cette détermination ne fait pas intervenir l'équation de conduction et les conditions de conservation. Nous supposons donc que les données de CAUCHY consistent dans les valeurs $(g_{\alpha\beta}, \partial_\alpha g_{\alpha\beta})$ sur S . La température θ peut être discontinue à la traversée de S . Les conditions de raccordement de l'espace sont préservées.

Nous orientons l'hypersurface S par sa normale $\vec{n}$, de façon à distinguer une face négative et une face positive. Les symboles ψ_- et ψ_+ représentent les limites en un point $x \in S$, vers lesquelles tend la fonction $\psi(x^\alpha)$ lorsque le point x^α varie dans le voisinage correspondant de S , pour tendre vers x .

Les quantités $S^{0\lambda}$ ne dépendent que de $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$ comme on a vu au § 26. Elles sont donc continues à la traversée de S . Des équations (38.1) on déduit :

$$(38.2) \quad [T^{0\lambda}] = T_+^{0\lambda} - T_-^{0\lambda} = 0.$$

Le problème consiste à déterminer les valeurs ρ_+ , p_+ , θ_+ , u_+^λ , q_+^λ lorsqu'on se donne les valeurs ρ_- , p_- , θ_- , u_-^λ , q_-^λ , ou inversement. C'est le problème posé dans l'étude des ondes de choc. Les équations (38.2) généralisent donc les équations des ondes de choc.

Nous nous proposons d'écrire les équations en vue des applications.

Nous allons prendre dans la suite un espace-temps V_4 de la relativité restreinte, rapporté à des coordonnées galiléennes réduites. Nous changeons de notation dans les équations (38.1) et (38.2) en remplaçant l'indice 0 par l'indice 1, réservant ainsi l'indice 0 à la variable temps $x^0 = ct$.

L'hypersurface S aura alors pour équation locale :

$$x^1 = 0.$$

Nous choisissons en outre le repère galiléen de façon que l'axe des x^1 ait la direction du vecteur vitesse d'espace $\vec{V}$. $\vec{V}$ représente la vitesse des molécules du fluide dans chacun des voisinages de S .

Il en résulte que :

$$(38.3) \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad u^1 = \frac{V}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad u^2 = u^3 = 0 \quad \left(\beta = \frac{V}{c}\right).$$

L'hypersurface S doit être orientée dans le temps, $g^{11} = -1$. Les équations

$$(38.4) \quad T^{1\lambda}_+ = T^{1\lambda}_-$$

s'écrivent explicitement :

$$(38.5) \quad \begin{aligned} (\rho_+ + p_+)u^1_+u^0_+ - (u^0_+q^1_+ + u^1_+q^0_+) &= (\rho_- + p_-)u^1_-u^0_- - (u^0_-q^1_- + u^1_-q^0_-) \\ (\rho_+ + p_+)(u^1_+)^2 + p_+ - (u^1_+q^1_+ + u^1_+q^1_+) &= (\rho_- + p_-)(u^1_-)^2 + p_- - (u^1_-q^1_- + u^1_-q^1_-) \\ &- u^1_+q^2_+ = -u^1_-q^2_- \\ &- u^1_+q^3_+ = -u^1_-q^3_- \end{aligned}$$

A ces équations il faut adjoindre les hypothèses (§ 22)

$$(38.7) \quad \rho = \mu(1 + \varepsilon)$$

$$(38.7) \quad \nabla_\alpha(\mu u^\alpha) = 0.$$

A partir de l'équation (38.7), il est possible de déduire une équation analogue à une relation connue dans l'étude des ondes de choc.

Choisissons en effet un domaine B limité par deux surfaces voisines et parallèles à S :

$$x^1 = -\varepsilon \quad x^1 = +\varepsilon$$

dans un tube de courant. Intégrons l'équation (38.7) sur ce domaine :

$$\iiint_B \nabla_\alpha(\mu u^\alpha) d\tau = \iint_{\partial B} \mu u^\alpha \nu_\alpha d\omega = 0$$

$d\omega$ est l'élément d'aire de la frontière ∂B de B . En vertu du choix du domaine B , on a

$$\iint_{S_{+\varepsilon}} \mu u^\alpha \nu_\alpha d\omega - \iint_{S_{-\varepsilon}} \mu u^\alpha \nu_\alpha d\omega = 0.$$

v_α désigne les composantes de la normale aux hypersurfaces $x^i = \text{const.}$ Ici, on a $v_0 = v_2 = v_3 = 0$, $v_1 = 1$. En faisant tendre ε vers 0, on déduit de l'égalité précédente, l'équation cherchée :

$$(38.8) \quad \mu_+ u_+^1 = \mu_- u_-^1.$$

Les équations (38.5) (38.6) (38.7) et (38.8) constituent l'extension relativiste des équations d'HUGONIOR pour une onde de choc, compte tenu des phénomènes thermiques. Il convient de leur adjoindre l'équation d'état.

Il est facile de mettre les équations dans le cas adiabatique ($\vec{q} = 0$) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_+ V_+}{c \sqrt{1 - \beta_+^2}} &= \frac{\mu_- V_-}{c \sqrt{1 - \beta_-^2}} = m \\ \frac{m \left(1 + \varepsilon_+ + \frac{p_+}{\mu_+} \right)}{\sqrt{1 - \beta_+^2}} &= \frac{m \left(1 + \varepsilon_- + \frac{p_-}{\mu_-} \right)}{\sqrt{1 - \beta_-^2}} \\ \frac{m \left(1 + \varepsilon_+ + \frac{p_+}{\mu_+} \right) V_+}{c \sqrt{1 - \beta_+^2}} + p_+ &= \frac{m \left(1 + \varepsilon_- + \frac{p_-}{\mu_-} \right) V_-}{c \sqrt{1 - \beta_-^2}} + p_-. \end{aligned}$$

On en tire les corrections relativistes vis-à-vis des équations de HUGONIOR.

CHAPITRE V.

MOUVEMENTS PERMANENTS ET APPLICATIONS A DES MODELES D'UNIVERS THERMODYNAMIQUES STATIONNAIRES

I. - Mouvements permanents d'un fluide parfait thermodynamique.

39. Espace-temps stationnaire dans un domaine.

L'étude des mouvements permanents d'un schéma thermodynamique est liée à la théorie des espaces-temps stationnaires. Il est indispensable de rappeler quelques définitions générales.

La métrique de l'espace-temps V_4 est dite *localement stationnaire* dans un domaine d'un système de coordonnées locales (x^0, x^i) , si celles-ci peuvent être choisies de façon que les potentiels correspondants $g_{\alpha\beta}$ soient indépendants de la variable temps x^0 , les lignes le long desquelles cette variable x^0 varie seule, étant orientées dans le temps.

L'espace-temps est dit *stationnaire* dans un domaine D_4 , si la variété riemannienne définie par D_4 munie de la métrique d'univers $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, admet un groupe connexe d'isométries globales à un paramètre, ne laissant invariant aucun point de D_4 et dont les trajectoires z sont orientées dans le temps.

On suppose de plus que les z sont homéomorphes à la droite réelle R et qu'on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions V_3 , satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4 , telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de classe C^2 , de D_4 sur le produit topologique $V_3 \times R$.

On sait alors que le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries, satisfait aux équations de KILLING

$$Xg_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

où X désigne l'opérateur de dérivation de LIE relatif au vecteur $\vec{\xi}$.

De l'homéomorphisme de D_4 sur $V_3 \times R$, il est possible de déduire des systèmes de coordonnées (x^0, x^i) dits adaptés au caractère stationnaire de V_4 , tels que les lignes de temps, trajectoires du champ de vecteurs $\vec{\xi}$, soient les lignes $x^i = \text{const.}$, et que la composante ξ^0 de $\vec{\xi}$ soit égale à 1.

Dans ce système de coordonnées

$$\xi_\alpha = g_{0\alpha}$$

$$Xg_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = \partial_0 g_{\alpha\beta} = 0.$$

Les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de la variable x^0 . La métrique de V_4 est localement stationnaire au voisinage de tout point de D_4 .

Dans ce même système de coordonnées, l'opérateur de dérivation de LIE, appliqué à une fonction scalaire F ou à un vecteur $\vec{u}$ se réduit à :

$$XF \equiv \xi^\alpha \partial_\alpha F = \partial_0 F$$

$$Xu_\beta \equiv \xi^\alpha \nabla_\alpha u_\beta + u_\alpha \nabla_\beta \xi^\alpha = \nabla_0 u_\beta + \Gamma_{0\beta}^\alpha u_\alpha = \partial_0 u_\beta.$$

40. Définition des mouvements permanents.

Etant donné un milieu thermodynamique en mouvement, associé à une métrique d'univers ds^2 dans un domaine D_4 de l'espace-temps V_4 , nous dirons que le mouvement de ce milieu est *permanent* si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- a. - l'espace-temps riemannien V_4 est stationnaire dans le domaine D_4 .
- b. - le groupe d'isométries laisse invariants le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$, le tenseur des pressions $\pi_{\alpha\beta}$ et la température θ du milieu.

On a ainsi les équations

$$X\vec{u} = 0 \quad X\pi_{\alpha\beta} = 0 \quad X\theta = 0.$$

Si les coordonnées locales choisies dans le domaine D_4 sont adaptées au caractère stationnaire de l'espace-temps V_4 , les conditions précédentes se réduisent à

$$\partial_0 u_\lambda = 0 \quad \partial_0 \pi_{\alpha\beta} = 0 \quad \partial_0 \theta = 0.$$

Les composantes u_λ du vecteur-vitesse unitaire sont constantes le long des lignes de temps, ainsi que celles du tenseur des pressions et que la température.

Dans le cas d'un fluide parfait thermodynamique, la deuxième équation se réduit à $Xp = 0$, et, en coordonnées adaptées à

$$\partial_0 p = 0.$$

41. Étude des mouvements permanents du fluide parfait thermodynamique.

Soit un schéma fluide parfait thermodynamique à équation d'état

$$\dot{p} = \varphi(p, \theta)$$

et tel que l'espace-temps V_4 associé au domaine D_4 occupé par ce fluide, soit stationnaire dans le domaine D_4 .

Dans la suite, nous supposerons choisi un système de coordonnées adapté (x^0, x^i) .

Considérons un mouvement de ce fluide.

Soit x un point de D_4 appartenant à la variété S d'équation $x^0 = 0$, supposée non exceptionnelle pour le problème de CAUCHY relatif au fluide considéré.

Sur la variété S et sur les variétés voisines d'équation $x^0 = \text{const.}$, nous avons les trois égalités suivantes (cf. § 28; éq. (28.6) (28.7) et (28.8)):

$$(41.1) \quad \chi(V^0 + \kappa \partial^0 \theta) u^0 = S^{00} + \chi p g^{00}$$

$$(41.2) \quad \chi(V^0 Z + \kappa \Delta_1 \theta u^0) = (S^{0\lambda} + \chi p g^{0\lambda}) \partial_\lambda \theta$$

$$(41.3) \quad \chi^2[(V^0)^2 + 2\kappa V^0 Z u^0 + \kappa^2 \Delta_1 \theta (u^0)^2] = g^{\lambda\mu} (S_\lambda^0 + \chi p g_\lambda^0) (S_\mu^0 + \chi p g_\mu^0)$$

où

$$V^0 = (\rho + p - \kappa Z) u^0 + \kappa (\partial^0 \theta - Z u^0)$$

$Z = u^0 \partial_\rho \theta$ et où le vecteur courant de chaleur q^α est défini par

$$q^\alpha = -\kappa (\partial^\alpha \theta - Z u^\alpha)$$

Nous ferons l'hypothèse suivante :

espace-temps stationnaire

$$\partial_0 \theta = 0$$

$$(41.4) \quad \partial_0 q^0 = c \rho u^0 \partial_0 \theta - \frac{l}{\rho} u^0 \partial_0 \rho$$

en coordonnées adaptées. Mais nous conservons la dérivée $\partial_{00} \theta$ dans les calculs. Il en résulte que :

$$\partial_0 (\partial^0 \theta) = \partial_0 (g^{0\lambda} \partial_\lambda \theta) = g^{00} \partial_{00} \theta$$

$$\partial_0 \Delta_1 \theta = 2 \partial^0 \theta \partial_{00} \theta.$$

Nous allons étudier la variation des différentes quantités introduites dans les équations, par les transformations du groupe d'isométries. Pour cela, il nous suffit de suivre leur variation le long des trajectoires d'isométrie. Nous dérivons donc les équations (41.1) (41.2) (41.3) par rapport à x^0 , en tenant compte de l'équation d'état, et nous explicitons l'hypothèse (41.4).

En coordonnées adaptées, on a :

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0 \quad \partial_0 S^{0\lambda} = 0.$$

La dérivation annoncée conduit aux équations suivantes où l'on a posé :

$$W^0 = V^0 + \kappa \partial^0 \theta$$

$$(41.1') \quad g^{00} \partial_0 p - W^0 \partial_0 u^0 - \kappa u^0 g^{00} \partial_{00} \theta - u^0 \partial_0 V^0 = 0$$

$$(41.2') \quad \partial^0 \theta \partial_0 p - \kappa \Delta_1 \theta \partial_0 u^0 + (W^0 - 2\kappa \partial^0 \theta) u^0 \partial_{00} \theta - V^0 \partial_0 Z - Z \partial_0 V^0 = 0$$

$$(41.3') \quad W^0 u^0 \partial_0 p - \kappa (Z V^0 + \kappa \Delta_1 \theta u^0) \partial_0 u^0 + \kappa^2 (u^0)^2 \partial^0 \theta \partial_{00} \theta \\ + \kappa V^0 u^0 \partial_0 Z + (V^0 + \kappa Z u^0) \partial_0 V^0 = 0$$

$$(41.4') \quad \frac{l}{\rho} u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \partial_0 p + \kappa Z \partial_0 u^0 - \kappa g^{00} \partial_{00} \theta + \kappa u^0 \partial^0 Z = 0.$$

A ces quatre équations, il nous faut ajouter la relation suivante tirée de l'expression de V^0 , par dérivation

$$(41.5) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + 1 \right) u_0 \partial_0 p + (\rho + p - 2\kappa Z) \partial_0 u^0 + \kappa g^{00} \partial_{00} \theta - \partial_0 V^0 = 0.$$

En multipliant l'équation (41.2') par κu^0 , puis l'ajoutant à (41.3'), il vient :

$$V^0 [u^0 \partial_0 p - \kappa Z \partial_0 u^0 - \kappa (u^0)^2 \partial_{00} \theta - \partial_0 V^0] = 0.$$

La variété $S(x^0 = 0)$ étant supposée non exceptionnelle pour le problème de CAUCHY, $V^0 \neq 0$ (cf. § 30), on en déduit :

$$\partial_0 V^0 = [u_0 \partial_0 p - \kappa Z \partial_0 u^0 - \kappa (u^0)^2 \partial_{00} \theta].$$

En portant cette valeur de $\partial_0 V^0$ dans les équations (41.1') (41.2') (41.5), en conservant l'équation (41.4') nous obtenons finalement le système :

$$(41.6) \quad \frac{l}{\rho} u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \partial_0 p + \kappa Z \partial_0 u^0 - \kappa g^{00} \partial_{00} \theta + \kappa u_0 \partial^0 Z = 0$$

$$(41.7) \quad u^0 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \partial_0 p + (\rho + p - \kappa Z) \partial_0 u^0 + \kappa [g^{00} + (u^0)^2] \partial_{00} \theta - 2\kappa u_0 \partial^0 Z = 0$$

$$(41.8) \quad [g^{00} - (u^0)^2] \partial_0 p - (W^0 - \kappa Z u^0) \partial_0 u^0 - \kappa u^0 [g^{00} - (u^0)^2] \partial_{00} \theta = 0$$

$$(41.9) \quad (\partial^0 \theta - Z u^0) \partial_0 p - \kappa (\Delta_1 \theta - Z^2) \partial_0 u^0 + (\rho + p - \kappa Z) (u^0)^2 \partial_{00} \theta - V^0 \partial_0 Z = 0$$

linéaire et homogène par rapport aux inconnues.

Le déterminant de ce système est identique au déterminant D auquel on est conduit dans l'étude du problème de CAUCHY au chapitre IV. Or, la variété S est supposée non exceptionnelle. D n'est pas nul. Le système des équations précédentes admet donc la solution unique :

$$\partial_0 p = \partial_0 u^0 = \partial_{00} \theta = \partial_0 Z = 0.$$

On en déduit également $\partial_0 V^0 = \partial_0 \rho = 0$. En se reportant à l'expression de u_λ , calculée dans l'étude du problème de CAUCHY (§ 28), ainsi qu'à la définition du vecteur courant de chaleur, on en déduit également

$$\partial_0 u^\lambda = 0 \quad \partial_0 q^\lambda = 0.$$

Il en est de même de toute caractéristique du fluide définie à partir des quantités ρ , p , θ , u^λ . Elle reste constante le long des trajectoires d'isométries.

Nous pouvons énoncer le théorème.

THÉOREME. - *Étant donné dans un domaine D_4 de l'espace-temps, un fluide parfait thermodynamique admettant une équation d'état, pour que le mouvement de ce fluide soit permanent, il faut et il suffit que*

a. - *l'espace-temps riemannien associé soit stationnaire dans le domaine D_4 .*

b. - le groupe d'isométries laisse invariante la température θ et qu'en coordonnées adaptées, la composante contravariante $q^0 = -\kappa(\partial^0\theta - Zu^0)$ du vecteur courant de chaleur, dans la direction des trajectoires d'isométries, satisfasse à la relation

$$\partial_0 q^0 = c\rho u^0 \partial_0 \theta - \frac{l}{\rho} u^0 \partial_0 \rho.$$

S'il en est ainsi, le groupe d'isométries laisse invariants la pression p , le vecteur vitesse unitaire u^λ , le vecteur courant de chaleur q^λ , ainsi que toute caractéristique définie à partir des quantités ρ , p , u^λ , θ .

II. - Notion globale d'espace-temps stationnaire.

42. Définition globale d'espace-temps stationnaire.

Nous terminerons notre étude mathématique de la théorie relativiste des fluides thermodynamiques, par l'application à des modèles d'univers thermodynamiques stationnaires. Nous allons rappeler d'abord les résultats essentiels de la théorie globale des espaces-temps stationnaires. On trouvera un exposé de cette théorie, dans l'ouvrage de M. LICHNEROWICZ consacré à l'étude mathématique des théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (voir bibliographie).

Les notions qui vont être rappelées, sont indispensables à la compréhension de notre dernière étude. Nous exprimons toute notre reconnaissance à M. LICHNEROWICZ de nous avoir permis d'en faire usage.

Un espace-temps riemannien V_4 est dit stationnaire, s'il est stationnaire dans toute sa variété, c'est-à-dire s'il existe un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de V_4 , à trajectoires z orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de V_4 . La famille des lignes z appelées lignes de temps, doit satisfaire aux hypothèses suivantes :

a. - Les Z sont homéomorphes à la droite réelle R .

b. - on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions V_3 , satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que V_4 , tel qu'il existe un homéomorphisme différentiable de classe C^2 de la variété V_4 sur le produit topologique $V_3 \times R$, dans lequel les z s'appliquent sur les droites facteurs. Cet homéomorphisme est de plus supposé continu par morceaux jusqu'à l'ordre 4.

On peut identifier V_3 à l'espace dont les points z sont lignes de temps de V_4 . V_3 sera dit espace-quotient, ou plus brièvement, espace.

Il existe alors dans V_4 des coordonnées locales adaptées au caractère stationnaire de V_4 , jouissant des propriétés suivantes :

1. - les (x^i) sont un système de coordonnées locales arbitraires de V_3 . Les variétés $x^0 = \text{const.}$ sont des variétés globalement définies dans V_4 et homéomorphes à V_3 . Elles seront appelées sections d'espace W_3 .

2. - les potentiels relatifs aux coordonnées adaptées (x^0, x^i) sont indépendants de la variable x^0 .

3. - le vecteur $\vec{\xi}$ générateur infinitésimal du groupe d'isométries, admet pour composantes contravariantes $\xi^i = 0$, $\xi^0 = 1$, le carré de ce vecteur est

$$\xi^2 = g_{00} > 0 \quad (\xi = \sqrt{\xi^2} > 0).$$

4. - ces coordonnées sont définies à un changement de variables près

$$\begin{aligned} x^{0'} &= x^0 + \psi(x^k) \\ x^{i'} &= \psi^i(x^k) \end{aligned}$$

où ψ désigne la restriction à une carte locale de V_3 d'une fonction $\psi(z)$ définie sur V_3 .

Dans la suite, nous n'introduirons que des systèmes de coordonnées locales adaptées.

43. Les espaces riemanniens V_3 et W_3 .

Sur chaque section d'espace W_3 , la métrique de V_4 avec son groupe d'isométries définit des tenseurs. Ainsi les g_{ij} définissent sur W_3 un tenseur symétrique, les $g_{0i} = \xi_i$ un vecteur covariant, $g_{00} = \xi^2$ un scalaire, parce que ces quantités se transforment tensoriellement dans le changement de coordonnées locales

$$(43.1) \quad \begin{aligned} x^{0'} &= x^0 \\ x^{i'} &= \psi^i(x^k) \end{aligned}$$

qui conserve W_3 .

Parmi ces tenseurs, certains tels que $g_{00} = \xi^2$ viennent s'appliquer les uns sur les autres, dans l'application induite par l'homéomorphisme de deux sections d'espace de systèmes différents. Ils peuvent ainsi être considérés comme définis sur l'espace quotient V_3 . Ils doivent rester invariants par le changement de coordonnées

$$(43.2) \quad \begin{aligned} x^{0'} &= x^0 + \psi(x^k) \\ x^{i'} &= x^i \end{aligned}$$

qu'on appelle un changement de systèmes de sections d'espace.

À chaque point x d'un voisinage de V_4 , on peut associer un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{e}_0$ soit le vecteur unitaire tangent en x à la ligne de temps $z(x)$ passant par x . Il lui correspond alors un système de formes de PFAFF locales ω^z .

$$(43.3) \quad d\vec{x} = \omega^0 \vec{e}_0 + \omega^i \vec{e}_i.$$

La métrique de V_4 prend la forme :

$$(43.4) \quad ds^2 = (\omega^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\omega^i)^2.$$

Un tel repère orthonormé sera dit adapté, et sera distingué par des indices soulignés.

La formule (43.4) n'est autre qu'une décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale attachée à V_4 , la variable x^0 y joue le rôle de variable directrice. On en déduit :

$$(43.5) \quad \begin{aligned} \omega^0 &= \frac{1}{\xi} (g_{00} dx^0 + g_{0i} dx^i) \\ - \sum_{i=1}^3 (\omega^i)^2 &= \left(g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j. \end{aligned}$$

La forme quadratique $ds^2 = - \sum_{i=1}^3 (\omega^i)^2$ est indépendante de la variable x^0 et indépendante de tout système de sections d'espace. Elle définit sur V_3 une métrique définie négative. Nous poserons

$$g_{ij}^* = g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}.$$

Le tenseur conjugué a pour valeur :

$$g^{ij*} = g^{ij}.$$

Nous supposerons dans la suite que les variétés V_3 et W_3 sont douées de la structure de variété riemannienne

$$ds^2 = g_{ij}^* dx^i dx^j.$$

44. Rappel des formules fondamentales dans V_3 et W_4 .

Si on introduit le vecteur φ_λ défini dans V_4 par

$$(44.1) \quad \varphi_\lambda = \frac{\xi_\lambda}{\xi^2} = \frac{g_{0\lambda}}{g_{00}} \quad (\varphi_0 = 1)$$

on vérifie que les composantes $H_{0\lambda} = \partial_0 \varphi_\lambda - \partial_\lambda \varphi_0$ de son rotationnel $H_{\lambda\mu}$ sont nulles. Les H_{ij} définissent ainsi un tenseur sur V_3 .

Le tenseur d'espace H_{ij} a une signification géométrique importante. Sa nullité entraîne que les lignes de temps sont trajectoires orthogonales des sections d'espace locales.

Dans l'espace-quotient V_3 , on a ainsi défini un scalaire ξ , une métrique riemannienne définie négative ds^2 et un tenseur antisymétrique H_{ij} . Sur chaque section d'espace W_3 , se trouve défini outre ces éléments communs à V_3 , un champ de vecteurs φ_i tel que

$$(44.2) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= g_{ij} - \xi^2 \varphi_i \varphi_j \\ H_{ij} &= \partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i. \end{aligned}$$

On peut évaluer les composantes du tenseur de RICCI de V_4 en repère orthonormé adapté, en fonction de celles de V_3 et des différents tenseurs introduits. Voici les relations établies par M. LICHNEROWICZ :

$$\begin{aligned}
 R_{i\bar{k}} &= \overset{*}{R}_{i\bar{k}} - \frac{1}{\xi} \overset{*}{\nabla}_{\bar{k}}(\partial_i \xi) - \frac{\xi^2}{2} H_{i\bar{j}} H_{k\bar{j}} \\
 R_{i\bar{0}} &= \frac{1}{2\xi^2} \overset{*}{\nabla}_{\bar{j}}(\xi^3 H_{i\bar{j}}) \\
 R_{0\bar{0}} &= -\frac{1}{\xi} \overset{*}{\nabla}_{\bar{j}} \xi + \frac{\xi^2}{2} H^2
 \end{aligned}
 \tag{44.3}$$

où

$$H^2 = \frac{1}{2} H_{i\bar{j}} H_{i\bar{j}}$$

l'astérisque $*$ indique que l'opérateur correspondant est relatif à la métrique ds^{*2} de V_3 .

Dans une section d'espace W_3 , la composante R_0^0 du tenseur de RICCI présente le caractère scalaire. On peut la calculer dans le repère naturel associé au système de coordonnées locales adaptées.

En effet, si $(\vec{e}_\alpha)$ est le repère naturel en x , on a :

$$d\vec{x} = dx^\alpha \vec{e}_\alpha = \omega^\alpha_{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}}.$$

Soit $(A_{\bar{\alpha}}^\alpha)$ la matrice de passage des repères, et $(A_{\bar{\beta}}^\beta)$ la matrice inverse. A partir des formules (43.4) et (44.1), on établit les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
 A_{0\bar{0}} &= \xi & A_{i\bar{0}} &= \xi \varphi_{i\bar{j}} & A_{0\bar{i}} &= 0 \\
 A_{0\bar{0}} &= \frac{1}{\xi} & A_{i\bar{0}} &= -\varphi_{i\bar{j}} & A_{0\bar{i}} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{44.5}$$

Il en résulte que

$$R_0^0 = A_{\bar{\alpha}}^0 A_0^{\bar{\alpha}} R_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{\xi} g^{i\bar{j}} \overset{*}{\nabla}_{\bar{j}}(\partial_i \xi) + \frac{\xi^3}{2} \varphi_{k\bar{j}} H_{i\bar{k}}$$

et on est conduit à introduire le vecteur $\vec{h}$ de W_3 défini par ses composantes en repère orthonormé

$$h_{i\bar{j}} = \partial_i \xi + \frac{\xi^3}{2} \varphi_{k\bar{j}} H_{i\bar{k}}.$$

En vertu du caractère tensoriel sur W_3 des différents termes introduits, on peut faire intervenir des composantes relatives aux coordonnées locales, et écrire la formule :

$$(44.6) \quad h_i = \partial_i \xi + \frac{\xi^3}{2} \varphi_k H^k_i \quad (H^k_i = g^{kl} H_l)$$

et

$$(44.7) \quad R_0^0 = -\frac{1}{\xi} \operatorname{div}^* \vec{h}.$$

Si nous introduisons le vecteur $\vec{p}$ de composantes

$$p_i = \partial_i \xi - h_i = \frac{\xi^3}{2} \varphi_k H^k_i$$

la formule (44.7) peut s'écrire

$$(44.8) \quad R_0^0 = -\frac{1}{\xi} \Delta^* \xi + \frac{1}{\xi} \operatorname{div}^* \vec{p}.$$

D'autre part, d'après (44.5), $R_{0\gamma} = A_0^\alpha A_{0\beta} R_{\alpha\beta} = \xi^2 R_{00}$. La troisième relation (44.3) fournit alors :

$$\frac{R_{00}}{g_{00}} = -\frac{1}{\xi} \Delta^* \xi + \frac{\xi^2}{2} H^2$$

soit, en retranchant membre à membre avec (44.8)

$$\xi \left[\frac{R_{00}}{g_{00}} - R_0^0 \right] = \frac{\xi^3}{2} H^2 - \operatorname{div}^* \vec{p}.$$

Or, on a manifestement $R_{00} = g_{00} R_0^0 + g_{0i} R_0^i$. En remarquant que $\frac{g_{0i}}{g_{00}} = \varphi_i$, on en déduit

$$(44.9) \quad \xi \varphi_i R_0^i = \frac{\xi^3}{2} H^2 - \operatorname{div}^* \vec{p}.$$

Soit C une chaîne différentiable de dimension 3 dans W_3 , de bord ∂C . Par intégration sur C , on obtient la formule intégrale

$$(44.10) \quad \iiint_C \xi \varphi_i R_0^i d\tau = \iiint_C \frac{\xi^3}{2} H^2 d\tau - \operatorname{flux}_{\partial C}^* \vec{p}$$

où $d\tau$ désigne l'élément de volume de W_3 munie de la métrique ds^2 .

45. Conduction de chaleur en régime permanent.

Si le mouvement d'un milieu fluide parfait thermodynamique est permanent, la température θ ne dépend pas de la variable x^0 . Il en résulte que $\theta(x')$ est une fonction scalaire de classe C^2 définie sur W_3 . Son gradient y définit un champ de vecteurs covariants.

D'autre part, le changement de coordonnées (43.1) qui conserve W_3 , transforme les composantes du vecteur vitesse unitaire u^λ , suivant les formules

$$u^{0'} = u^0 \quad u^{i'} = u^k \frac{\partial \psi^{i'}}{\partial x^k}.$$

On peut regarder les u^i comme les composantes d'un vecteur contravariant défini sur W_3 .

Nous pouvons faire des remarques analogues sur le vecteur courant de chaleur

$$q^i = -\kappa(\partial^i \theta - Z u^i)$$

$$q^0 = -\kappa(\partial^0 \theta - Z u^0)$$

$Z = u^\rho \partial_\rho \theta$ est un scalaire défini dans W_3 ; il en résulte que q^i sont les composantes d'un vecteur contravariant défini sur W_3 . On notera le caractère scalaire sur W_3 de u^0 , $\partial^0 \theta$, q^0 .

L'équation de conduction de la chaleur s'écrit

$$(45.1) \quad \nabla_\alpha q^\alpha = \partial_\alpha q^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha q^\beta = c\rho Z - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho.$$

Dans le système de coordonnées adaptées choisi, $\partial_0 q^0 = 0$ et $\Gamma_{\alpha 0}^\alpha = \partial_0 \log \sqrt{|g|} = 0$, $\partial_0 \rho = 0$, de sorte que l'équation (45.1) se réduit à

$$(45.2) \quad \partial_i q^i + \Gamma_{\alpha j}^\alpha q^j = c\rho Z - \frac{l}{\rho} u^i \partial_i \rho.$$

Le second membre de cette équation a le caractère scalaire sur W_3 . Nous nous proposons de transformer l'équation de conduction dans V_4 , en une formule de divergence dans W_3 .

Pour cela, cherchons à évaluer la quantité Γ_{ij}^{*i} dans la métrique ds^{*2} de W_3 . Nous avons :

$$\Gamma_{ij}^{*i} = g^{ik} [j, k] = \frac{1}{2} g^{ik} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) = \frac{1}{2} g^{ik} \partial_j g_{ik}.$$

Substituons aux g_{ik} leurs valeurs en fonction des $g_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{*i} &= \frac{1}{2} g^{ik} \left\{ \partial_j g_{ik} - \partial_j \left(\frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} g^{ik} \left\{ \partial_j g_{ik} - \frac{1}{(g_{00})^2} (g_{00} g_{0i} \partial_j g_{0k} + g_{00} g_{0k} \partial_j g_{0i} - g_{0i} g_{0k} \partial_j g_{00}) \right\}. \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} g^{ik}g_{0i} &= g^{zk}g_{0z} - g^{0k}g_{00} = -g_{00}g^{0k} \\ g^{ik}g_{0i}g_{0k} &= -g_{00}g^{0k}g_{0k} = -g_{00}(1 - g^{00}g_{00}) \end{aligned}$$

nous aurons :

$$\Gamma_{ij}^* = \frac{1}{2} [g^{ik}\partial_j g_{ik} + g^{i0}\partial_j g_{i0} + g^{0k}\partial_j g_{0k} + g^{00}\partial_j g_{00}] - \frac{1}{2} \frac{\partial_j g_{00}}{g_{00}} = \Gamma_{\alpha j}^\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial_j g_{00}}{g_{00}}.$$

Comme $g_{00} = \xi^2$, nous en déduisons la formule :

$$(45.3) \quad \Gamma_{\alpha j}^\alpha = \Gamma_{ij}^* + \frac{1}{2} \frac{\partial_j \xi}{\xi}.$$

En portant cette valeur dans (45.2), il vient

$$\nabla_i q^i + \frac{q^i \partial_i \xi}{\xi} = c\rho Z - \frac{l}{\rho} u^i \partial_i \rho.$$

Nous utiliserons cette formule sous la forme équivalente :

$$(45.4) \quad \nabla_i (\xi q^i) = \xi \left(c\rho Z - \frac{l}{\rho} u^i \partial_i \rho \right).$$

On y voit apparaître l'influence du champ de gravitation par la présence du facteur ξ , dans la conduction de la chaleur.

De la formule de divergence (45.4) dans l'espace, il nous est possible de tirer des applications de nature globale sur des modèles d'univers.

III - Applications à des modèles d'univers thermodynamiques stationnaires.

46. Univers adiabatiques.

Un modèle d'univers est dit *univers adiabatique*, si le vecteur courant de chaleur $q^\alpha = -\kappa(\partial^\alpha \theta - Zu^\alpha)$ est partout nul. Mais le champ de température n'est pas nécessairement constant. On a alors l'équation

$$c\rho u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho} u^\alpha \partial_\alpha \rho = 0$$

qui régit l'évolution thermique de la matière.

Le second principe (§ 24) donne alors :

$$\nabla^\alpha (\rho \sigma u^\alpha) \geq 0.$$

L'entropie de chaque élément de l'univers va constamment en croissant. C'est cette propriété qui doit fixer le sens des lignes de courant et des lignes de temps.

47. Univers adiabatique stationnaire à sections d'espace compactes orientables.

Considérons un modèle d'univers thermodynamique U satisfaisant aux hypothèses suivantes :

- a.* - la métrique de U est partout régulière, stationnaire ;
- b.* - en dehors des domaines meublés par la matière, cette métrique satisfait aux équations du cas extérieur

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

Dans les domaines engendrés par les lignes de temps, meublés par la matière, cette métrique satisfait aux équations du cas intérieur

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

sans constante cosmologique.

Les deux métriques intérieure et extérieure se raccordent conformément aux conditions de SCHWARZSCHILD ;

- c.* - les sections d'espace W_s sont des variétés compactes, orientables, orientées dans l'espace ;

- d.* - le mouvement du milieu thermodynamique dans les domaines meublés est permanent, et adiabatique :

$$q^\alpha = -\kappa(\partial^{x\theta} - Zu^\alpha) = 0.$$

On notera que le théorème général sur les mouvements permanents (§ 41) s'applique à des modifications très simples près, la définition de ces mouvements restant la même.

Le vecteur courant de chaleur q^α est nul. Il n'y a pas de conduction thermique. Le tenseur d'impulsion-énergie devient :

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}.$$

Nous allons pouvoir démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. - *Il ne peut exister de modèle d'univers adiabatique stationnaire satisfaisant aux hypothèses a b c d.*

En effet, des équations d'EINSTEIN, on tire :

$$R_0^0 = \chi \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) = \chi \left[\rho \left(u_0 u^0 - \frac{1}{2} \right) + p \left(u_0 u^0 + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Or, il vient du caractère unitaire de u_λ :

$$\begin{aligned} u_0 u^0 - \frac{1}{2} &= g^{00}(u_0)^2 + g^{0i}u_0 u_i - \frac{1}{2}[g^{00}(u^0)^2 + 2g^{0i}u_0 u_i + g^{ij}u_i u_j] \\ &= \frac{1}{2}[g^{00}(u_0)^2 - g^{ij}u_i u_j]. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses faites sur les sections d'espace W_3 , $g^{ij}u_i u_j$ est définie négative. Il en résulte que la quantité $\left(u_0 u^0 - \frac{1}{2}\right)$ est positive et il en est à fortiori de même, de la quantité $u_0 u^0 + \frac{1}{2}$.

R_0^0 est alors strictement positif, dans les régions meublées de W_3 , nul en dehors. De la relation (44.7) qui s'écrit

$$\operatorname{div}^* \vec{h} = -\xi R_0^0$$

on déduit par intégration sur W_3 :

$$\iiint_{W_3} \xi R_0^0 d\tau = 0.$$

Cette relation est impossible, puisque R_0^0 est strictement positif dans certains domaines de W_3 et nul sur le complémentaire. On en déduit le théorème énoncé.

48. Comportement asymptotique euclidien.

Considérons un espace euclidien E_3 à trois dimensions, admettant une métrique définie négative ds^2 . Nous rapportons E_3 à un système de coordonnées normales y^i pour lesquelles

$$(48.1) \quad d\bar{s}^2 = \delta_{ij} dy^i dy^j$$

où $\delta_{ij} = -1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Nous dirons que l'espace-temps V_4 admet un comportement asymptotique euclidien sur W_3 , lorsque pour un point a de W_3 et un nombre R suffisamment grand :

a. - il existe un homéomorphisme H de classe C^2 du domaine $d(a, x) > R$ de W_3 sur un domaine de E_3 homéomorphe au complémentaire d'une boule fermée de E_3 . $d(a, x)$ désigne la distance de deux points a et x de la variété riemannienne W_3 .

b. - si y^α est un système de coordonnées privilégiées de V_4 défini dans le domaine de V_4 qui correspond au domaine $d(a, x) > R$ de W_3 , par les y^i et la variable x^0 , nous avons dans ce domaine

$$(48.2) \quad |g_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r} \quad |\partial_\gamma g_{\alpha\beta}| < \frac{M}{r^2}$$

où $\delta_{\alpha\beta} = 0$ si $\alpha \neq \beta$, $\delta_{00} = +1$, $r = d(a, x)$, M est un nombre positif fixe et où les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées sont relatifs aux coordonnées privilégiées y^x .

Dans la suite, nous n'envisagerons que des éléments de la section d'espace W_3 de V_4 .

Soit x_0 un point de W_3 tel que $r_0 = d(a, x) > R$, y^0 son image par l'homéomorphisme H dans E_3 et ρ_0 la distance ordinaire de y_0 à l'origine 0 dans E_3 . On démontre que :

$$(48.3) \quad \rho_0 < Kr_0$$

K étant un nombre positif fixe.

Soit alors Σ_ρ une sphère de E_3 de centre 0 et de rayon ρ , S_{r_0} l'ensemble des points de W_3 tels que $d(a, x) = r_0 > R$. Nous choisissons ρ suffisamment grand pour que Σ_ρ contienne l'image par H de S_{r_0} et désignons par S_ρ l'image dans W_3 de la sphère Σ_ρ .

Considérons le compact B_ρ de W_3 défini par :

1. - les points x pour lesquels $d(a, x) \leq r_0$.
2. - les points x pour lesquels $d(a, x) \geq r_0$, dont l'image dans E_3 est intérieure à la sphère Σ_ρ ou sur cette sphère.

Le bord de B_ρ est S_ρ orientée vers l'extérieur.

$\vec{p}$ désigne le vecteur introduit au § 44, de composantes

$$p_i = \frac{\xi^3}{2} \varphi_k H_i^k.$$

On se propose d'étudier le comportement de son flux à travers S_ρ quand $\rho \rightarrow \infty$.

Pour cela évaluons le module p du vecteur $\vec{p}$. Dans un repère orthornomé de W_3 :

$$p_i = -\frac{\xi^3}{2} \sum_k \varphi_k H_{i\bar{k}}.$$

D'après l'inégalité de SCHWARTZ :

$$(p_i)^2 \leq \left(\frac{\xi^3}{2}\right)^2 \sum_k (\varphi_k)^2 \sum_j (H_{i\bar{j}})^2$$

on en déduit :

$$\sum_i (p_i)^2 \leq \left(\frac{\xi^3}{2}\right)^2 \sum_k (\varphi_k)^2 \sum_{i,j} (H_{i\bar{j}})^2.$$

En introduisant les modules φ et H des tenseurs φ_k et H_{ij} , on a :

$$p \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^3 \varphi H.$$

Le flux de $\vec{p}$ à travers S_ρ peut alors être majoré par :

$$|\text{flux}_{S_\rho}^* \vec{p}| \leq \iint_{S_\rho} p d\sigma \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{S_\rho} \xi^3 \varphi H d\sigma^*$$

où $d\sigma^*$ est l'élément d'aire de S_ρ dans la métrique ds^2 .

Sous nos hypothèses, on a sur S :

$$\xi^3 \varphi H < \frac{C_1}{r^3}$$

où $r = d(a, x)$ et C_1 est un nombre fixe. Il en résulte d'après (48.3) qu'il existe un nombre fixe C_2 tel que

$$\xi^3 \varphi H < \frac{C_2}{\rho^3}.$$

D'autre part

$$\iint_{S_\rho} d\sigma^* = \iint_{S_\rho} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right] d\bar{\sigma} = C_3 \iint_{S_\rho} d\bar{\sigma}$$

où $d\bar{\sigma}$ désigne l'aire euclidienne et C_3 est un nombre fixe. Il vient ainsi

$$|\text{flux}_{S_\rho}^* \vec{p}| < \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{C_2}{\rho^3} C_3 4\pi \rho^3 < \frac{C}{\rho}$$

C étant un nombre fixe.

On en déduit la formule

$$(48.4) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{flux}_{S_\rho}^* \vec{p} = 0.$$

49. Univers thermodynamique stationnaire à comportement asymptotique euclidien.

Considérons un modèle d'univers thermodynamique stationnaire U satisfaisant aux hypothèses suivantes :

a. - la métrique de U est partout régulière, stationnaire. L'espace-temps associé admet une section d'espace W_3 complète et à comportement asymptotique euclidien dans le domaine à l'infini de W_3 .

b. - les distributions énergétiques sont à distance finie et occupent dans W_3 des domaines D_4 . La température θ tend uniformément vers une constante dans le domaine à l'infini de W_3 .

c. - le milieu matériel remplissant les domaines D_4 est supposé être un fluide parfait thermodynamique, obéissant aux équations sans constante cosmologique

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

et animé d'un mouvement permanent.

Un tel modèle d'univers thermodynamique stationnaire sera dit plus simplement à *comportement asymptotique euclidien*.

Nous ferons l'hypothèse

$$(49.1) \quad Z \equiv u^\alpha \partial_\alpha \theta = 0 \quad u^\alpha \partial_\alpha \rho = 0$$

c'est-à-dire que la température et la densité restent constantes le long des lignes de courant, α est supposé constant. L'équation de conduction thermique se réduit alors à

$$(49.2) \quad \operatorname{div} (\xi \vec{\operatorname{grad}} \theta) = 0.$$

Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$(49.3) \quad \begin{aligned} L(\theta) &\equiv g^{ij} \partial_{ij} \theta + h^k \partial_k \theta = 0 \\ h^k &= -g^{ij} \Gamma_{ij}^k + g^{ik} \partial_i \xi \end{aligned}$$

où par hypothèse θ est une fonction de classe C^2 , les $g_{\alpha\beta}$, ξ sont de classe C^1 . h^k est donc continue.

θ tend uniformément vers une constante K dans le domaine à l'infini de W_3 . Cela signifie que, a désignant un point déterminé, à tout ε on peut associer un nombre R ne dépendant que de ε , tel que

$$d(a, x) \geq R \quad \text{entraîne} \quad |\theta(x) - K| < \varepsilon.$$

Alors, ou bien $\theta(x) = K$ sur W_3 ; ou bien $\theta(x)$ prend sur W_3 des valeurs différentes de K . Supposons par exemple qu'il existe un point x_0 tel que :

$$\theta(x_0) > K$$

(on traiterait de même l'hypothèse contraire en raisonnant sur $-\theta$). On a :

$$\theta(x) < K + \varepsilon < \theta(x_0).$$

Considérons le domaine C_R défini par $d(a, x) \leq R$. Il contient x_0 à son intérieur. Le maximum de $\theta(x)$ sur C_R est donc atteint en un point intérieur b et l'on a :

$$\begin{aligned} \text{pour } d(a, x) \leq R & \quad \theta(x) \leq \theta(b) \\ \text{pour } d(a, x) \geq R & \quad \theta(x) < \theta(x_0) \leq \theta(b) \end{aligned}$$

$\theta(x)$ atteint donc son maximum au point b .

Revenons maintenant à (49.3). La forme quadratique des coefficients g^{ij} est définie négative, θ est de classe C^2 et h^k continue. Nous pouvons appliquer le théorème de HOPF⁽⁶⁾ et en déduire que θ est une constante sur W_3 .

Nous énonçons donc ce premier résultat.

(6) E. HOPF, « Preuss. Akad. Wiss », 19, 147-152, (1927).

THÉOREME. - *Dans tout modèle d'univers thermodynamique stationnaire à comportement asymptotique euclidien, si la température θ et la densité ρ restent constantes le long des lignes de courant, le champ de température θ est constant.*

En particulier si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, on a aussi $u^x \partial_x \theta = u^x \partial_x \rho = 0$ et le champ de température est constant.

Considérons le compact B_ρ tel qu'il a été défini dans le paragraphe précédent. Appliquons à B_ρ la formule (40.10). Pour ρ suffisamment grand, il vient

$$\iiint_{B_\rho} \xi \varphi_i R_0^i d\xi = \iiint_{B_\rho} \frac{\xi^3}{2} H^2 d\tau - \text{flux}_{S_\rho}^* \vec{p}$$

R_0^i étant nul en dehors des domaines D_u , nous avons la relation

$$\sum_u \iiint_{D_u} \xi \varphi_i R_0^i d\tau = \iiint_{B_\rho} \frac{\xi^3}{2} H^2 d\tau - \text{flux}_{S_\rho}^* \vec{p}.$$

Lorsque $\rho \rightarrow \infty$, le flux de $\vec{p}$ tend vers 0 d'après la formule (48.4). L'intégrale du second membre est convergente. On a :

$$(49.4) \quad \iiint_{W_3} \frac{\xi^3}{2} H^2 d\tau = \sum_u \iiint_{D_u} \xi \varphi_i R_0^i d\tau.$$

Des équations d'EINSTEIN, on tire

$$R_0^i = S_0^i = \chi[(\rho + p)u_0 u^i - p g_0^i - (u_0 q^i + u^i q_0)].$$

Si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, dans notre système de coordonnées adaptées, $u^i = 0$ et d'après le théorème précédent $\theta = \text{const}$, $q^i = 0$. Il en résulte que R_0^i est nul et la relation (49.5) se réduit à

$$\iiint_{W_3} \frac{\xi^3}{2} H^2 d\tau = 0.$$

L'élément d'intégration est positif ou nul. Il est nécessaire que $H^2 \equiv 0$ sur W_3 . L'espace-temps est tel que les lignes de temps sont orthogonales à une famille de sections d'espace locales. Un tel modèle d'univers est un espace-temps statique au sens de LEVI-CIVITA.

Nous avons établi le théorème suivant qui constitue une extension d'un théorème global connu [18].

THÉOREME. - *Tout modèle d'univers thermodynamique stationnaire à comportement asymptotique euclidien, pour lequel les lignes de courant de la matière (supposée schématisée sous forme de fluide parfait) coïncident avec les lignes de temps, est partout statique au sens de Levi-Civita. Le champ de température y est constant.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, 1946.
- [2] E. CARTAN, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, « Journ. Math. », t. 1, 1922, p. 141-203.
- [3] J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, 1930.
- [4] G. DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne*, « Mémorial des Sc. Math. », fasc. XXV, 1927.
- [5] P. DUHEM, *Hydrodynamique. Élasticité. Acoustique*, Cours de Physique mathématique et de cristallographie à la Faculté des Sciences de Lille, Herrmann, 1891.
- [6] D. VAN DANTZIG, *On relativistic thermodynamics*, « Proc. Kond. Ned. Akad. v. Wetensch. », Amsterdam 42, 601-607, 1939.
- [7] D. VAN DANTZIG, *On the thermohydrodynamics of perfectly perfect fluid*, Ib., 43, 1940.
- [8] C. ECKART, *The thermodynamics of irreversible process. III, Relativistic theory of the simple fluid*, « Phys. Rev. », 58, 1940.
- [9] EINSTEIN, *Sitzungsber.*, Berlin, 1918, p. 155-167. Quatre conférences sur la théorie de la relativité faites à l'université de Princeton (trad. M. Solovine, Gauthier-Villars, 1925).
- [10] CH. FABRY, *Éléments de thermodynamique*, A. Colin, 1950.
- [11] Mme Y. FOURES-BRUHAT, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, « Acta Mathematica », 88, p. 141-225, 1952.
- [12] FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur in Oeuvres de Fourier*, Gauthier-Villars, 1888.
- [13] H. HUGONOT, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits*, « J. de l'École Polytechnique », 57^e cah. 1877, 58^e cah. 1889.
- [14] A. LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mécanique relativiste* « Act. Sc. Ind. 833 », Herrmann, Paris, 1939.
- [15] A. LICHNEROWICZ, *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste*, « Ann. École normale supérieure », fasc. IV, 1941.
- [16] A. LICHNEROWICZ, *Algèbre linéaire*, Masson, 1947.
- [17] A. LICHNEROWICZ, *Éléments de calcul tensoriel*, A. Colin, 1950.
- [18] A. LICHNEROWICZ, *Étude mathématique des théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme* (cours professé au Collège de France) (sous presse). I. - *Relativité générale classique* (1952-53). II. - *Théories unitaires* (1953-54).
- [19] PHAM MAU QUAN, Notes aux C. R. Acad. des Sc., t. 236, p. 2299-2301 (1953), t. 237, p. 22-24 (1953), t. 238, p. 324-325 (1954).
- [20] R. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1950.
- [21] A. H. TAUB, *Relativistic Rankine Hugoniot equations*, « Physical Rev. », 74, 1948, p. 328.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	pag. 3
Notation et symboles	» 13
CHAPITRE I. - Considérations géométriques générales	» 15
1. La variété espace-temps	» 15
2. Orientations dans l'espace et le temps	» 16
3. Temps et espace associés. Composante de temps et composante d'espace d'un vecteur	» 17
4. Utilisation d'un repère galiléen local	» 18
5. Le système des équations d'Einstein	» 19
CHAPITRE II. - Le fluide thermodynamique relativiste. Axiomatique et définitions générales	» 21
I. - Définitions générales	» 21
6. Définition et propriétés générales	» 21
7. Espace-temps riemannien associé à un fluide	» 22
II. - La conduction de la chaleur	» 23
8. L'hypothèse de Fourier en relativité	» 23
9. Chaleur dégagée par un élément quadridimensionnel de fluide	» 25
10. L'équation relativiste de la conduction thermique	» 27
III. - Le tenseur d'impulsion-énergie du schéma du fluide thermodynamique	» 29
11. Le tenseur d'impulsion-énergie du schéma fluide thermodynamique	» 29
12. Expression des composantes du tenseur d'énergie	» 30
13. Les équations de mouvement pour un schéma fluide thermodynamique	» 31
14. Cas d'un fluide parfait thermodynamique	» 33
CHAPITRE III. - Les principes généraux d'une thermodynamique relativiste	» 34
I - Forme différentielle des principes de thermodynamique classique pour un fluide en mouvement	» 34
15. Evolution des caractéristiques d'un fluide en mouvement	» 34
16. Variables de Lagrange	» 35
17. Lemme	» 37
18. Enoncés des principes de la thermodynamique appliqués à un milieu fluide	» 38
19. Forme différentielle du premier principe	» 39
20. Forme différentielle du second principe	» 42
II. - L'extension relativiste des principes de la thermodynamique	» 43
21. L'interprétation des équations du fluide thermodynamique relativiste	» 43
22. L'équation de continuité relativiste et les principes de conservation classiques	» 45
23. La forme entropie	» 47
24. L'extension relativiste du second principe de la thermodynamique	» 49
CHAPITRE IV. - La structure des équations du champ relatif à un fluide parfait thermodynamique	» 53
I. - Le problème de Cauchy	» 53
25. Position du problème	» 53
26. La solution des équations sans second membre	» 54

27. Analyse des équations du problème intérieur	pag. 56
28. Détermination de $p, u_\lambda, \partial_{00}g_{ij}$	» 59
29. Détermination de $\partial_0 p, \partial_0 u^\lambda, \partial_{00}\theta$	» 60
30. Caractère général de la solution du problème intérieur	» 61
II. - <i>Le problème de raccordement</i>	» 64
31. Généralités	» 64
32. Prolongement de l'intérieur de la matière vers l'extérieur	» 65
33. Prolongement de l'extérieur vers l'intérieur	» 66
III. - <i>Étude des variétés exceptionnelles</i>	» 67
34. Généralités sur les variétés exceptionnelles	» 67
35. Les variétés caractéristiques V_3^c	» 68
36. Vitesse de propagation des surfaces de discontinuités	» 69
37. Les variétés exceptionnelles du premier ordre V_3^H	» 71
38. Les variétés exceptionnelles d'ordre zéro V_3^0	» 74
CHAPITRE V. - Mouvements permanents et applications à des modèles d'univers thermodynamique stationnaires	» 77
I. - <i>Mouvements permanents d'un fluide parfait thermodynamique</i>	» 77
39. Espace-temps stationnaire dans un domaine	» 77
40. Définition des mouvements permanents	» 78
41. Étude des mouvements permanents d'un fluide parfait thermodynamique	» 78
II. - <i>Notion globale d'espace-temps stationnaire</i>	» 81
42. Définition globale d'un espace-temps stationnaire	» 81
43. Les espaces riemanniens V_3 et W_3	» 82
44. Rappel des formules fondamentales dans V_3 et W_3	» 83
45. Conduction de chaleur en régime permanent	» 86
III. - <i>Applications à des modèles d'univers thermodynamiques stationnaires</i>	» 87
46. Univers adiabatiques	» 87
47. Univers adiabatique stationnaire à sections d'espace compactes orientables	» 88
48. Comportement asymptotique euclidien	» 89
49. Univers thermodynamique stationnaire à comportement asymptotique euclidien	» 91
Bibliographie	» 95
Table des Matières	» 97

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ

Equations de Laplace et espaces harmoniques.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 16 Juin 1954.

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. PÉRÈS

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris

JEAN SARRAILH

ERRATA

A corriger

comme

page 53 : éq. (25.2)

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}$$

page 54 : ligne 2 et suivantes

$$R_{\alpha\beta} = \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right)$$

où T désigne l'invariant $g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$ qui a pour valeur

$$T = \rho - 3p$$

Si on remarque que $R = -\chi T$, on conclut...

page 57 : éq. (27.9)

$$R_{\alpha\beta} = \chi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right)$$

page 58 : éq. (27.9a)

$$R_{ij} \equiv -\frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + F_{ij}(dc) = \chi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \right)$$

éq. (27.9b)

$$R_{i0} \equiv \frac{1}{2} g^{0j} \partial_{00} g_{ij} + \Phi_i(dc) = \chi \left(T_{i0} - \frac{1}{2} T g_{i0} \right)$$

$$R_{00} \equiv -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_{00} g_{ij} + \Psi(dc) = \chi \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right)$$

page 63 : ligne 23

$$R_{ij} = \chi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \right)$$

page 87 : éq. (45.3)

$$\Gamma_{\alpha j}^{\alpha} = \Gamma_{ij}^* + \frac{\partial_j \xi}{\xi}$$

page 92 : éq. (49.3)

$$h^k = -g^{ij} \Gamma_{ij}^{*k} + g^{ik} \frac{\partial_i \xi}{\xi}.$$

